UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE INGENIERÍA
CAMPUS I

COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Elementos de Socioepistemología y de Transposición didáctica de saberes matemáticos, astronómicos y de mareas oceánicas para replantear la formación de Agrónomos a través de la predicción del efecto gravitatorio de la Luna y el Sol en las plantas.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
CON ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA

JULIO CÉSAR GRAJALES JOSÉ

DIRECTOR DE TESIS
DR. GERMÁN MUÑOZ ORTEGA

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS, DICIEMBRE DEL 2009.

A Dios

Por todas sus gracias y bendiciones que me ha dado, no solo en estos momentos, sino desde que fui concebido.

A mi esposa Arline Díaz Pineda

Fiel compañera con quien he compartido mi vida desde hace más de 23 años, su llegada cambió mi vida y la ha llenado de felicidad, comprensión, amor y ternura. Madre de mis tres hijos, quienes llenaron de dicha y felicidad nuestro hogar. Hoy puedo decirle que este trabajo es compartido con ella, y que sin ella no hubiese sido posible.

A mis hijos: Carlos, Arline y María Pilarcita

Por haberme animado a cursar la Maestría y por sus comprensión en todo momento, aún en aquellos que no pude compartir con ustedes por dedicarme al estudio. Hoy puedo decirles que la meta se ha alcanzado y el logro no es solo mío, sino también de ustedes.

A mis padres: Artemio Grajales Arce y Pilar José Ruiz

Por traerme a este mundo y enseñarme los valores de responsabilidad, amor al trabajo, constancia, respeto, entre otros, que me han permitido alcanzar las metas y objetivos que he propuesto en la vida.

A mis hermanos:

Isabel, Víctor Manuel, María Lilia, María Antonieta, Guillermina, Amando y María del Rosario, por los momentos compartidos.

A mis compañeros de la Maestría:

Hugo, José Ventura, Karina, Osvaldo y Paty por todos los momentos de alegría y tensiones que compartimos durante los dos años que estudiamos juntos

Al Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica (CoSNET)

Por haberme otorgado la Beca – Comisión para poderme dedicar a los estudios de Maestría y a la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial por creer en mí y en la superación de la plantilla docente.

Al Dr. Germán Muñoz Ortega

Por todo el tiempo dedicado al presente trabajo y por haber sido el primero en creer que era posible realizar un estudio de éste tipo, por su amistad y manera de dirigir tan sencilla y amena que él tiene.

A mis profesores de la maestría

Dr. Germán Muñoz Ortega, Dra. Gabriela Buendía Ábalos, Dr. Miguel Solís Esquinca, Dr. Pedro Ortíz, M. C.Cristobal Cruz Ruiz, M. C. Hipólito Hernández Pérez, y M.C. Rodolfo Trujillo, por el tiempo compartido con ellos.

Al Lic. Romeo Molina y al Lic. Javier Alejandro Luna Mancilla

Por el apoyo en la tramitación de la Beca – Comisión ante el CoSNET y por creer en mi persona.

INDICE

Introducción

Una idea bastante generalizada en las instituciones públicas de nivel superior, consiste en creer que las reformas curriculares resolverán los problemas didácticos que afrontan, de ahí que éstas sean bastante frecuentes en dichas instituciones, sin embargo, la designación de los nuevos objetos de enseñanza por la noosfera (formada por especialistas en la disciplina, portavoces de la institución escolar, representantes políticos, padres de familia suficientemente cultivados, etc), no conduce más que a un eterno desplazamiento de las dificultades de aprendizaje, sin que jamás se alcance el progreso.(Cantoral y Farfán, 2004).

La Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, ubicada en el municipio Villa Flores, Chiapas, de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH) no es la excepción y en mayo del año 2006 culminó la última reforma curricular, la cual puso en marcha en agosto del mismo año. En el caso del área de matemáticas, se establecieron dos cursos: Matemáticas I y Matemáticas II, en los semestres I y II respectivamente. En dichos programas se designa el 50% de la carga horaria (dos horas semanales) a prácticas en el Rancho San Ramón ubicado en el mismo municipio propiedad de dicha Facultad o bien en ella misma, en donde se tiene como propósito, vincular los conocimientos teóricos de las materias con problemas reales de agronomía. Sin embargo, hasta hoy, no se ha realizado ninguna práctica que cumpla con tal propósito, la razón fundamental es que la literatura recomendada en los programas de estudio no está diseñada para aplicarse al campo agronómico, por lo mismo tratan los temas contenidos en los programas de estudio, en el terreno puramente matemático o bien aplicado a otras áreas como la física y solamente algunos plantean ejercicios diseñados (no reales) que tienen alguna relación con las actividades del sector agropecuario.

Lo anterior constituye un problema didáctico para la Matemática Educativa, el cual deberá de atenderse o de lo contrario jamás se alcanzará el progreso y los objetivos planteados; (Cantoral y Farfán 2004), como lo confirma el hecho que después de tres años de la puesta en marcha del nuevo plan de estudios, en el área de matemáticas no haya pasado nada y los profesores sigan impartiendo sus cursos en forma teórica dejando a un lado la vinculación de los contenidos temáticos con problemas reales de la agronomía.

Para la Matemática Educativa, el problema didáctico no se circunscribe únicamente a la relación maestro – alumno, sino que de acuerdo con Chevallard (1994), el problema didáctico se da desde la propia comunidad matemática que crea dichos saberes, la sociedad en la que se circunscribe, las comunidades de prácticas a las que se desea aplicar, las autoridades educativas, el que enseñar, etc. Por ello, el presente trabajo, parte del qué enseñar y realiza la transposición didáctica correspondiente para que pueda aplicarse a la solución de problemas reales de agronomía.

Para poder realizar la transposición didáctica del saber sabio a el saber enseñar y luego al saber enseñado, se parte del fenómeno conocido en las comunidades de agrónomos y rurales como efecto de Luna, el cual consiste en creer que nuestro satélite natural tiene influencia sobre el rendimiento de los cultivos, la durabilidad del grano cosechado, las precipitaciones pluviales, la durabilidad de la madera, entre otras, dependiendo de que la siembra, cosecha, poda, etc, de cultivos o el corte de árboles maderables se ejecuten en cierto estado de la Luna. El haber elegido este fenómeno para realizar dicha transposición didáctica, condujo a la presente investigación a estudiar tres aspectos fundamentales y que se convirtieron en las columnas vertebrales del presente trabajo.

1) Se realizó un estudio histórico – epistemológico y sociocultural del efecto que la Luna tiene principalmente sobre los cultivos y los árboles maderables, lo que a su vez llevó a revisar datos históricos y epistemológicos de la Astronomía en algunas culturas antiguas, dándole mayor importancia a las culturas mesoamericanas y la occidental, la primera por ubicarse en el lugar que actualmente se localiza parte de nuestro país y la segunda por ser herederos directos de dicha cultura después de la conquista española. Lo anterior permite ver como la necesidad de predecir las mejores épocas de siembra, cosecha, etc, llevaron a nuestros antepasados a crear los calendarios y en la cultura

náhuatl por ejemplo a realizar recomendaciones sobre la siembra de ciertos cultivos o la extracción se savia del maguey para el pulque de acuerdo con las fases lunares. Realizar dicho estudio permitió también revisar las teorías actuales que tratan de explicar el influjo lunar sobre los cultivos, como es la teoría del flujo de la savia de las plantas de acuerdo con el crecimiento aparente de la Luna, así como realizar una investigación de campo con productores agropecuarios del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas, México, para poder contrastarla con la teoría mencionada y con la atracción gravitacional de la Luna y el Sol de acuerdo con las mareas oceánicas.

2) Debido a que las mareas oceánicas constituyen un fenómeno natural que permite ver y estudiar la atracción gravitacional de la Luna y el Sol y que se encuentra científicamente estudiado y predecible de acuerdo a la posición que guardan dichos astros en un momento dado, se realiza un estudio histórico - epistemológico de ellas, lo cual permite comprender la influencia lunisolar que ocurre en los océanos y desde luego sobre la superficie sólida de la Tierra y por ende sobre las plantas que crecen sobre ella.
3) Una vez realizado el estudio epistemológico de las mareas, se realiza un análisis del proceso de matematización de dicho fenómeno, el cual desde luego se sustenta en la matematización de la astronomía, por lo que se inicia con ella hasta llegar a la teoría de la gravitación universal de Newton, que se constituyó en el sustento teórico de la matematización de dicho fenómeno. La matematización de las mareas oceánicas se aborda primero de la forma ortodoxa, en donde la herramienta matemática empleada es principalmente la teoría de campos vectoriales. Posteriormente y con el objetivo de que la herramienta matemática empleada fuese más acorde con los contenidos teóricos especificados en el programa de estudio de Matemáticas I de la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH, se diseñó un procedimiento matemático a través del empleo de las propiedades gráficas de la función coseno y se llegó a determinar un modelo bastante aproximado de la atracción gravitacional de la Luna y el

Sol, inclusive con órbitas elípticas de la Luna alrededor de la Tierra y de nuestro planeta alrededor del Sol. Esto último permitió rediseñar el discurso matemático escolar para la formación de Agrónomos.

El haber realizado el estudio histórico – epistemológico y sociocultural del efecto de Luna en la agronomía, permitió detectar, que en esta área, dicho fenómeno no se ha matematizado y los estudios que se han realizado suponen que la savia de las plantas sigue el ritmo de crecimiento aparente de la Luna y por lo tanto consideran que el vital líquido se concentra en mayor cantidad en las raíces en la Luna Nueva, en la copa de los árboles incluyendo flores y frutos en la Luna Llena, y en los tallos y ramas en el Cuarto Creciente y Menguante, hecho que no coincide con las creencias campesinas que consideran que en el novilunio la savia se concentra en los tallos, en tanto que en el plenilunio es menos abundante, en dicha parte de los vegetales.

El estudio de las mareas oceánicas y su matematización permitieron modelar el comportamiento ascendente y descendente de las aguas marinas como consecuencia de la atracción gravitacional conjunta de la Luna y el Sol, lo cual aporta elementos que las teorías agronómicas como la del flujo de la savia de las plantas no considera en el influjo lunar sobre vegetales, hecho que permite replantear dicha teoría, puesto que ésta al no tomar en cuenta el efecto gravitatorio de ambos astros, sino solamente el crecimiento aparente de la Luna, llega a conclusiones que no coinciden con dicha atracción gravitacional, por ejemplo, consideran que la Luna Nueva y la Luna Llena son los polos opuestos en el comportamiento de la savia, en cambio gravitacionalmente son muy similares, como lo muestran las mareas de sicigias que ocurren precisamente en el novilunio y plenilunio. Por otra parte, las mareas más bajas del mes lunar (bajamares o mareas muertas) ocurren tanto en el Cuarto Creciente como en el Cuarto Menguante lunar, debido a que la Luna y el Sol se encuentran en cuadratura y por lo tanto el efecto conjunto de atracción gravitatorio se contrarrestan, en cambio la teoría del flujo de la savia considera que en estas fases lunares la savia se concentra principalmente en la parte media de las plantas. Además, la teoría de las mareas explica perfectamente las dos mareas altas y las dos mareas bajas que ocurren en el transcurso de 24 horas con 49 minutos aproximadamente, ya que la rotación terrestre hace que el ángulo de un lugar específico de la Tierra varié 360º con respecto a la Luna y con respecto al Sol, por lo que al pasar dicho punto frente a la Luna que es el cuerpo celeste que más influye sobre las aguas oceánicas, éstas se elevan en mayor cantidad, pero al estar en cuadratura con ella se tendrán las mareas más bajas. Este hecho, la teoría del flujo de la savia de las plantas ni siquiera lo toma en cuenta.

Con lo expresado anteriormente y que se encuentra ampliamente sustentado en el cuerpo de la presente Tesis, ésta contribuye de manera innovadora en dos aspectos fundamentales:

1. Transpone algunos contenidos teóricos de Matemáticas I y Matemáticas II del plan de estudios vigente puesto en marcha en agosto del año 2006 en la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH, lo que permite rediseñar el discurso matemático escolar en las asignaturas mencionadas, sobre todo en el aspecto práctico, en donde contribuye a que algunos saberes matemáticos se resignifiquen en la modelación de problemas reales de agronomía, en donde también se desarrolla un procedimiento original haciendo uso de las propiedades gráficas de la función coseno para modelar la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre cualquier ser vivo que habite sobre la Tierra.
2. Transpone conocimientos astronómicos y matemáticos sobre la atracción gravitacional de la Luna y el Sol a la Agronomía, lo cual trastoca la teoría del flujo de la savia de las plantas y sienta las bases científicas sobre las que se debe experimentar en agronomía para determinar sobre bases sólidas la relación que existe entre la atracción gravitatoria de dichos astros y el comportamiento de la savia de las plantas o aspectos como el rendimiento, durabilidad del grano, etc, en ciertos cultivos o de la madera en el caso árboles de éste tipo.

La presente Tesis se encuentra organizada en cinco capítulos, los que de manera muy sintética contienen lo siguiente:

En el primer capítulo se exponen los antecedentes, el problema de investigación y los objetivos. En él se realiza un análisis de los programas de estudio de Matemáticas I y Matemáticas II de la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH, en donde se hace un análisis de la literatura recomendada y su relación con la aplicación a la agronomía. Se revisan algunos aspectos de la Luna como su historia, sus movimientos y sus efectos sobre la Tierra y las consecuencias que éstos tienen sobre la vida en nuestro planeta, así mismo se describen los movimientos más importantes de la Tierra en su transitar por el sistema solar. Además se expone una breve historia de la astronomía, sobre todo basada en la Arqueoastronomía que estudia los yacimientos arqueológicos relacionados con el estudio de la astronomía en las diferentes épocas de la humanidad en algunas culturas antiguas. Finalmente se expresa el planteamiento del problema de investigación y los objetivos que se han delineado.

En el capítulo II, se expone el marco teórico sobre el cual se sustenta la presente investigación, siendo éste la socioepistemología y la metodología que se emplea para su ejecución.

El capítulo III, aborda tres temas principales: 1) análisis histórico – epistemológico y sociocultural de los efectos de luna en la agricultura, en donde se reporta una síntesis de las entrevistas realizadas a campesinos del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas, sobre sus creencias respecto a los efectos de luna y las actividades agrícolas que llevan a cabo acordes a ella, se hace además una breve historia de las creencias que se tenían en la época prehispánica sobre sus efectos en los cultivos, hasta las teorías actuales que algunos agrónomos han realizado al respecto y las labores de cultivo que sugieren se realicen acordes con nuestro satélite; 2) Análisis histórico – epistemológico de las mareas oceánicas en donde se realiza una epistemología de las mareas desde la época antigua hasta la teoría newtoniana de éstas; y 3) se realiza un análisis de las similitudes y diferencias entre las creencias de las gentes del campo, las teorías agronómicas y las mareas, respecto a los efectos lunares.

En el Capítulo IV, se destaca el papel que la matemática ha jugado en la astronomía en la cultura occidental, para ello se enfatiza el papel que ésta ha tenido desde los pueblos mesopotámicos, pasando por los griegos hasta llegar al renacimiento. Finalmente se realiza un análisis matemático de los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol en las mareas oceánicas, modelando dicho fenómeno, a través de dos perspectivas: la ortodoxa que tiene como herramienta la teoría de campos vectoriales y la cosenoidal basada en aplicar las propiedades gráficas de la función coseno.

En el Capítulo V, denominado Análisis socioepiestemológico y transposición didáctica de los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol sobre las plantas, se analizan y discuten los problemas didácticos que los profesores de las materias de Matemática I y Matemáticas II de la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH, han tenido para impartir la parte práctica que establecen los programas de estudio y lo que han hecho al respecto. Así también se analizan los contenidos temáticos de las materias referidas que pueden abordarse al estudiar el efecto lunisolar sobre las plantas.

Se analizan también las creencias que los campesinos del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas, poseen sobre los efectos que la Luna tiene en sus cultivos, árboles maderables y animales. Se contrastan con lo planteado por la teoría de la savia de las plantas, para luego analizar las diferencias y semejanzas que ambas tienen con el modelo de atracción gravitacional de la Luna y el Sol expuesto en el presente trabajo, dicho modelo se basa en la teoría de las mareas que tienen un sustento científico en la teoría newtoniana de la gravitación universal y la astronomía.

Finalmente se presenta una secuencia didáctica que permite modelar la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre los océanos y sobre las plantas, transponiendo conocimientos de mareas oceánicas, matemáticos y astronómicos para la formación de Ingenieros Agrónomos.

En el capítulo VI, se presentan las conclusiones, implicaciones y recomendaciones de la presente investigación y que se pretende constituyan la base para algunas prácticas de los cursos de Matemáticas I y Matemáticas II de la Facultad a la que se hace referencia y de esa manera contribuir a superar el problema didáctico planteado en el presente trabajo, así también se dejan planteadas preguntas de investigación que se pueden abordar tomando como base el modelo general de atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre los seres vivos que habitan la superficie terrestre.

Después de los seis capítulos, se reportan las referencias bibliográficas y cinco anexos que sustentan lo expresado en varios capítulos.

Capítulo I

Antecedentes y problema de investigación.

Mis estudios de agronomía los terminé en el Departamento de Economía Agrícola de la Universidad Autónoma Chapingo, ubicada en el Estado de México, México, donde obtuve el Título de Ingeniero Agrónomo especialista en Economía Agrícola. El dejar al descubierto mi profesión es para dar una idea de lo que me motiva iniciar esta investigación. Como agrónomo he tenido la inquietud de saber si los efectos de luna son reales o simplemente supersticiones de las comunidades rurales, ya que en mi transitar por la escuela jamás se abordó el tema, y en la literatura hay dos versiones: los que creen que existe y recomiendan ciertas labores de cultivo acorde a sus creencias y quienes simplemente lo niegan.

Por otra parte, el estarme dedicando desde hace unos 12 años a la enseñanza de las matemáticas, tanto a nivel bachillerato como superior, en éste último en la carrera de agronomía (un tanto intermitente), me inquietó bastante el haberme enterado que en la reforma curricular de mayo del año 2006, en la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V de la UNACH, se plantee como objetivo para el área de matemáticas, aplicar los contenidos de las dos materias del plan de estudios a la agronomía y la literatura recomendada sea prácticamente la misma que los antiguos programas de estudio, lo cual se constituye en un reto para los maestros de dichas materias y para sus estudiantes, y desde la perspectiva de la Matemática Educativa en un problema didáctico que debe empezar a atenderse.

Para poder fundamentar adecuadamente la investigación, el presente capítulo en su apartado 1.1 realiza un análisis de los programas de estudio de Matemáticas I y Matemáticas II de la Facultad de Agronomía, Campus V, de la UNACH, en donde se hace un análisis de la literatura recomendada y su relación con la aplicación a la agronomía. En el subcapítulo 1.2 se revisan algunos aspectos de la Luna como su historia, sus movimientos y sus efectos sobre la Tierra y las consecuencias que éstos tienen sobre la vida en nuestro planeta, se finaliza el subcapítulo describiendo los movimientos más importantes de nuestro mundo. En el apartado 1.3 se realiza una breve historia de la astronomía, sobre todo basada en la Arqueoastronomía que estudia los yacimientos arqueológicos relacionados con el estudio de la astronomía en las diferentes épocas de la humanidad en algunas culturas antiguas. Finalmente en el subcapítulo 1.4 se realiza el planteamiento del problema de investigación y los objetivos que se han delineado.

1.1. Análisis curricular del área de matemáticas en la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, UNACH.

La reforma curricular concluida en mayo del año 2006 en la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, ubicado en Villa Flores, Chiapas, de la UNACH, estableció para el área de matemáticas, dos cursos: Matemáticas I y Matemáticas II, en los semestres I y II de todas las áreas terminales respectivamente, teniendo como objetivos que el estudiante sea capaz de aplicar los conocimientos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo para resolver problemas agropecuarios (ver anexo B).

En dichos programas se señala una bibliografía básica y otra complementaria, en donde los profesores que imparten dichas materias deberán apoyarse para preparar los temas a tratar, así como las prácticas que en ellos se establecen.

A continuación se realiza un análisis breve de la bibliografía señalada por temas impartidos en cada una de las materias:

Matemáticas I.

En la primera unidad se deberá de tratar los siguientes temas algebraicos: ecuaciones lineales, simultáneas y cuadráticas, como son temas bastantes comunes todos los libros de álgebra o que tratan temas algebraicos sugeridos en la bibliografía, generalmente lo abordan de una manera extensa, explicando detalladamente los diferentes métodos de solución a través de ejemplos puramente matemáticos y al final de cada tema normalmente proponen una serie de ejercicios que se relacionan en su mayoria con campos del conocimiento puramente matemático, en menor medida ejercicios relacionados con otras áreas del conocimiento como física, economía y solo algunos se relacionan con las actividades del campo. A continuación se transcriben los ejercicios que tienen alguna relación con las actividades agropecuarias o al menos en la redacción se han adaptado a actividades que se relacionan con el campo.

" Pagué $325 por un caballo, un coche y sus arreos. El caballo costó $80 más que el coche y los arreos $25 menos que el coche. Hallar los precios respectivos" (Baldor, 2005, p. 133)

"Un hacendado compró 4 vacas y 7 caballos por $514 y más tarde, a los mismos precios, compró 8 vacas y 9 caballos por $818. Hallar el costo de una vaca y de un caballo" (Baldor, 2005, p. 358)

"La longitud de un terreno rectangular es doble que el ancho. Si la longitud se aumenta en 40 m y el ancho en 6 m, el área se hace doble, hallar las dimensiones del terreno" (Baldor, 2005, p 461)

"Un ranchero compró 4 vacas y 7 caballos por $5 140.00 dólares y más tarde a los mismos precios, compró 8 vacas y 9 caballos por $8 180.00 dólares; encontrar el costo de una vaca y de un caballo" (Garza,1990, p 229)

"Cinco kg de tomate, 3 de chile y 4 de cebolla cuestan $11 800.00 pesos; 4 kg de tomate, 5 de chile y 3 de cebolla cuestan $14 500.00 pesos, dos kg de tomate, 1 de chile y dos de cebolla cuestan $460.00 pesos; hallar el costo de un kilo de tomate, chile y cebolla." (Garza, 1990, p. 229)

"Un canal de sección rectangular se hace doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica; si el ancho de la lámina es 18 pulgadas y la sección del canal es 40.5 pulgadas cuadradas, encontrar la anchura y la profundidad del canal" (Garza,1990 p. 240)

"Un ranchero compró cierto número de gallinas en $4 800.00 pesos si el precio por cada gallina hubiera sido $10.00 pesos menos, hubiera recibido 16 gallinas más por la misma cantidad. ¿Cuántas gallinas compró?" (Garza, 1990 p. 240)

De los libros sugeridos, solamente el de Algebra elemental moderna de Barnett, en ninguno de sus ejercicios trata temas que tengan alguna relación con la actividad agropecuaria, éste normalmente trata ejercicios relacionados con la matemática pura o con la física.

En la segunda unidad, Programación lineal, indica que deben tratarse dos temas: inecuaciones y método gráfico y simplex. Inecuaciones lo tratan algunos libros de álgebra como una extensión de la solución de ecuaciones lineales de una incógnita aplicando las propiedades de sumar, restar, multiplicar y dividir ambos miembros por una misma cantidad sea positiva o negativa y despejar la variable. El método gráfico y el simplex en ninguno de los libros sugeridos es tratado.

Los libros de álgebra que tratan inecuaciones, abordan ejemplos relacionados exclusivamente con el campo de conocimiento de la matemática pura, ejemplos relacionados con las actividades agropecuarias están completamente ausentes.

En la unidad III, Trigonometría y geometría, indica tratar los temas de funciones trigonométricas y triángulos y polígonos regulares e irregulares, los cuatro libros sugeridos tratan ambos temas de una manera bastante adecuada desde el punto de vista matemático, sin embargo, en sus problemas de aplicación no tratan ejercicios relacionados con actividades agropecuarias, a lo más tratan problemas del campo de la física como se muestra a continuación algunos ejemplos:

"Una lancha de motor navega en la dirección N40ºE por 3 horas a una velocidad de 20 mi/ha ¿qué distancia hacia el norte y hacia el este ha recorrido?" (Ayres y Moyer,1992, p. 65)

"Desde un bote que navega hacia el norte a 16.5 km/ha se observan directamente al este los restos de un naufragio K y una torre de observación T. Una hora después, el bote tiene una orientación de S 34º E con respecto a los restos del naufragio y S65º10'E con respecto a la torre de observación. Encuentre la distancia entre los restos del naufragio y la torre" (Ayres y Moyer, 1992, p. 65)

En la unidad IV, Logaritmos, incluye dos temas a tratar: ecuaciones logarítmicas y transformación y graficación de variables, también son tratados ambos temas en el campo puramente matemático y los ejercicios que se desarrollan están exclusivamente dentro de este campo.

Matemáticas II

En la unidad I, Cálculo diferencial, solamente contempla estudiar dos temas: derivación de funciones algebraicas y problemas de aplicación de máximos y mínimos, estos dos temas son tratados por siete de los libros sugeridos, los cinco de cálculo y los de análisis matemático I y II, el primer tema es tratado a través de explicar ejemplos puramente matemáticos, priorizando fuertemente el manejo de las fórmulas algebraicas de derivación para encontrar la derivada de las funciones matemáticas otorgadas explícitamente. El segundo tema lo abordan a través de explicar analíticamente los criterios de la primera y segunda derivada para obtener los puntos críticos que representan un máximo, un mínimo o un punto de inflexión y a manera de mostrar que los resultados obtenidos son correctos se grafican las ecuaciones proporcionadas y se muestra gráficamente los resultados obtenidos por el método analítico. Una vez establecido los criterios de optimización normalmente se resuelven algunos ejercicios que están relacionados con el área de las matemáticas y luego el de otros campos del conocimiento.

Una vez que se ha realizado el tratamiento analítico y mostrado a través de algunos ejemplos resueltos tanto del área de matemáticas como de otras áreas de aplicación, se proponen series de ejercicios para que los lectores los resuelvan. A continuación se transcriben algunos de los ejercicios que están resueltos o bien que se sugieren para resolverse y que tienen alguna relación con la actividad agropecuaria y que son típicos de la bibliografía sugerida.

"Una huerta rectangular ha de proyectarse al lado de un solar de un vecino, y ha de tener un área de 10 800 metros cuadrados. Si el vecino paga la mitad de la cerca medianera, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la huerta para que el costo de cercarla sea para el dueño de la huerta el mínimo? "(Granville, 1994, p. 74)

"La sección de un canal de irrigación abierto ha de tener la forma de un trapezoide isósceles con lados de pendiente de 4/3. Si el área de la sección ha de ser de 52.674 metros cuadrados, ¿qué dimensiones son las que hacen mínima la superficie sustentadora (el fondo y los lados)?"(Haser, Lasalle, y Sullivan, 1984, p. 467)

"Un ranchero tiene un rebaño de vacas, cada una de las cuales pesa 500 lb. Cuesta 50 centavos diarios mantener una vaca. Las vacas aumentan de peso al ritmo de 6 lb diarias. El precio de mercado para las vacas es ahora de $1 por libra y desciende 1 centavo al día, ¿cuánto tiempo debe esperar el ranchero para vender las vacas al objeto de ganar la máxima utilidad?, ¿cuánto ganará por esperar? [Nota: suponga que las vacas ganan de peso uniformemente durante cada día, que el costo de mantenerlas es distribuido uniformemente durante el día, etc]" (Bers, y Karal, 1983, p. 97)

"Un naranjal contiene ahora 40 árboles por acre con un rendimiento medio de 1000 naranjas por árbol. Se ha observado que por cada árbol adicional plantado por acre el rendimiento por árbol se reduce en 20 naranjas, ¿cuántos árboles deben ser plantados por acre para que produzcan el número máximo de naranjas?" (Bers, y Karal, 1983, p. 98)

Los demás autores no plantean ejercicios que tengan alguna relación con la agronomía o bien son del mismo tipo que los descritos, solo que cambian los valores numéricos o la redacción del problema, por lo que se consideró que no era necesario incluirlos como ejemplos típicos.

La unidad II, Cálculo integral, cuenta con un solo tema a tratar: integración y cálculo de áreas planas por integración. Para este tema hay una similitud en la forma de tratarlo en la bibliografía sugerida, normalmente se inicia con las integrales algebraicas en forma definida, mostrando como ésta se puede emplear para calcular el área de la curva que se obtiene de una expresión dada explícitamente, luego se definen las integrales indefinidas y se enseña a calcularlo analíticamente por los diferentes métodos de integración. En los casos de autores que presentan problemas de aplicación, éstos lo hacen en los campos puramente matemáticos y a lo mucho físicos. Aplicaciones al campo agronómico se encuentra ausente en la bibliografía sugerida.

Al revisar los programas analíticos de Matemáticas I y Matemáticas II, se encontró una sección denominada programa de prácticas que tiene asignada una carga horaria del 50% del total de cada materia (32 horas semestrales). En Matemáticas I se especifica realizar prácticas sobre problemas de aplicación de álgebra, programación lineal, trigonometría y geometría en campo, teniendo como espacio geográfico para realizarlas el Rancho San Ramón, ubicado en el municipio de Villa Flores, Chiapas, propiedad de la UNACH, para Matemáticas II las prácticas deberán ser sobre problemas de aplicación de cálculo diferencial e integral a la agronomía, teniendo como lugar de prácticas el mismo rancho. Ambos programas establecen que el propósito de dichas prácticas es vincular la teoria con problemas reales de agronomía. Además en la sección de evaluación en Matemáticas II se establece una evaluación final escrita y en campo, poniendo énfasis en los diseños utilizados con más frecuencia en experimentación agrícola.

Con lo dicho en el párrafo anterior, queda fuera de duda la importancia académica que le dieron a las prácticas matemáticas aplicadas al área de agronomía quienes crearon los programas de estudio, sin embargo, la bibliografía sugerida muy poco ayuda en éste sentido, puesto que los problemas que tienen alguna relación con el campo agropecuario, realmente son ejercicios adaptados por los autores de dichos libros, diseñados para que cuadren con la teoría matemática que están exponiendo, no para que representen una situación real del campo, es decir, no responden a problemas reales agropecuarios, además varios de los libros señalados ni siquiera plantean problemas que tengan alguna relación con la agronomía, claro, para ninguno de esos autores era el objetivo resolver problemas reales del campo agrícola.

En el caso de la bibliografía sugerida en la materia de Matemáticas II, se observó una inconsistencia, ya que se sugieren 3 libros de geometría analítica que nada tienen que ver con el contenido de la materia, ¿qué pasó ahí?, eso solo lo saben quienes crearon el programa de estudios de dicha materia.

Actualmente, la primera generación que está cursando el nuevo plan de estudios y con ello los de Matemáticas I y II, se encuentran en VII semestre, lo cual nos permite informarnos de las prácticas que han realizado en el rancho San Ramón en los cursos de matemáticas que han llevado o que están cursando los de primero y segundo semestres.

1.2 La Luna, su historia, sus movimientos y sus efectos sobre la Tierra

La Luna, el único satélite natural de la Tierra, por su tamaño es el quinto satélite del sistema solar, sin embargo, por su relación de masas con la Tierra es la segunda, sólo superada por Caronte, satélite de Plutón, ya que las demás lunas si bien varias de ellas lo superan en tamaño no en su relación de masas con el planeta en torno al cual giran, así se tiene: Ganímedes es 1 a 12 500 la masa de Júpiter, Titán 1 a 4 700 la masa de Saturno y nuestro satélite es 1 a 81.3 la masa de la Tierra, por lo que muchos científicos consideran al Sistema Tierra – Luna, como un sistema binario, debido al desmesurado tamaño que presenta el satélite con respecto al planeta, ya que si consideramos sus diámetros, el de la Luna es solo 3.6 veces menor que el de ésta. La siguiente imagen nos da una idea más clara de la diferencia de diámetros entre nuestro planeta y su satélite.

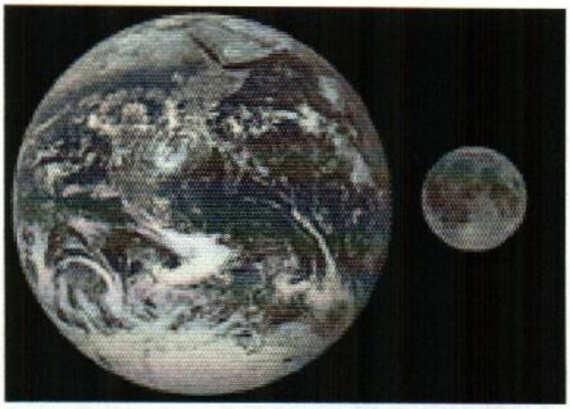


Imagen 1. La Tierra y la Luna. Fuente: Astronomía.com

Por lo expresado en el párrafo anterior, cuando se dice que la Tierra describe una órbita elíptica en torno al Sol, en realidad se debe decir que dicha órbita la describe el centro de masas del sistema Tierra-Luna. Ambos astros, unidos por un eje invisible, giran en torno a dicho centro de gravedad, el cual por sus masas se encuentra en el interior de la Tierra a unos 4 683 km del centro de ésta y se denomina baricentro.

1.2.1 Origen de la Luna

En la astronomía existen al menos cinco hipótesis sobre el origen de la Luna: la de fisión, la de captura, la de acreción binaria, la del impacto y la de precipitación. Sin embargo, en la actualidad se conocen con precisión algunos datos sobre nuestro satélite, los cuales deberían satisfacer cualquiera de las hipótesis planteadas para poder afianzarse al respecto. Dentro de los datos que se conocen con precisión sobre nuestro satélite se tienen los siguientes:

a) Tiene la misma edad que el resto de los cuerpos del sistema solar, como lo demuestra el análisis de las muestras traídas por los astronautas.

b) Tiene una densidad y composición mineral superficial muy similar a la de la corteza terrestre, pero en su densidad total es sólo el 60% del de la Tierra.
c) Se hallaba más cercana a la Tierra en sus inicios, como lo demuestra la dinámica de las mareas.
d) Se formó en la misma región del espacio que la Tierra, como lo demuestra el análisis isotópico de las muestras traídas por los astronautas.

A continuación se describen cada una de las hipótesis planteadas y se comentan las debilidades que tienen, lo cual indica que es difícil poder inclinarse por alguna de ellas, ya que con la información que actualmente se cuenta no es posible determinar científicamente el origen de nuestro satélite. Sin embargo, la comunidad científica de astronomía tiene sus inclinaciones por alguna de ellas, lo cual se comenta en su momento.

1. Hipótesis de fisión

La hipótesis de fisión supone que originariamente la Tierra y la Luna eran un sólo cuerpo y que parte de la masa fue expulsada, debido a la inestabilidad causada por la fuerte aceleración rotatoria que en aquel momento experimentaba nuestro planeta. La parte desprendida siguió en rotación que, con el paso del tiempo, se sincronizó con su periodo de traslación.

Quienes comparten esta hipótesis creen que la zona que se desprendió de la Tierra corresponde al Océano Pacífico, que tiene unos 180 millones de kilómetros cuadrados y con una profundidad media de 4 049 metros. Sin embargo, los detractores de esta hipótesis opinan que para poder separarse una porción tan importante de nuestro planeta, éste debería haber rotado a una velocidad tal que diese una vuelta en tan sólo 3 horas. Parece imposible tan fabulosa velocidad, porque con ella la Tierra no se hubiese formado al presentar un exceso de momento angular.

2. Hipótesis de captura

Una segunda hipótesis denominada 'de captura', supone que la Luna era un astro independiente, formado en un momento distinto al nuestro y en un lugar alejado.

La Luna inicialmente tenía una órbita elíptica con un afelio (punto más alejado del Sol) situado a la distancia que le separa ahora del Sol, y con un perihelio (punto más cercano al Sol) cerca del planeta Mercurio. Esta órbita habría sido modificada por los efectos gravitacionales de los planetas gigantes, que alteraron todo el sistema planetario expulsando de sus órbitas a diversos cuerpos, entre ellos, nuestro satélite. La Luna viajó durante mucho tiempo por el espacio hasta aproximarse a la Tierra y fue capturado por la gravitación terrestre.

Sin embargo, es difícil explicar cómo sucedió la importante desaceleración de la Luna, necesaria para que ésta no escapara del campo gravitatorio terrestre. Además implica que la edad de la Luna sería distinta a la de la Tierra, lo que contradice los resultados de las muestras obtenidas por los astronautas.

3. Hipótesis de acreción binaria

La hipótesis de la acreción binaria supone la formación al mismo tiempo tanto de la Tierra como de la Luna, a partir del mismo material y en la misma zona del Sistema solar. A favor de esta teoría se encuentra la datación radioactiva de las rocas lunares traídas a nuestro planeta por las diversas misiones espaciales, las cuales fechan entre 4.500 y 4.600 millones de años la edad lunar, aproximadamente la edad de la Tierra.

Como inconveniente tenemos que, si los dos se crearon en el mismo lugar y con la misma materia: ¿cómo es posible que ambos posean una densidad tan diferentes?. La Luna tiene una densidad muy parecida a la de la corteza terrestre lo que representa solamente el 60% de la densidad de la Tierra, ésta última es más densa sobre todo porque en su núcleo se encuentran grandes cantidades de minerales pesados, la Luna no posee una composición similar y su densidad es muy distinta a la de la Tierra porque su núcleo es muy pequeño.

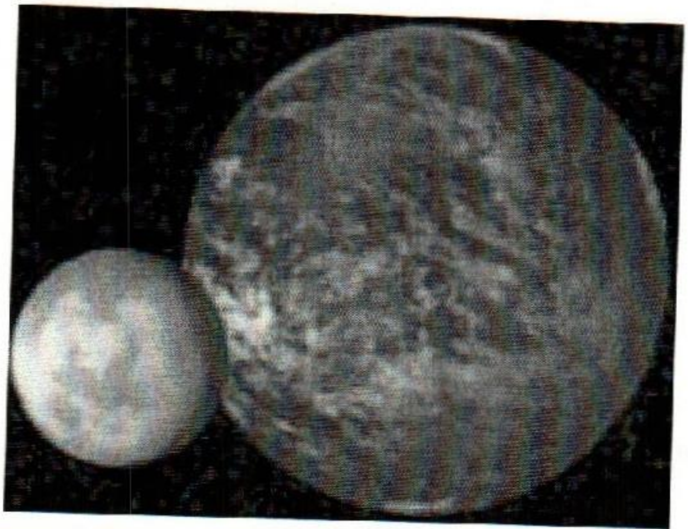


Imagen 2. Simulación de la creación binaria de la Tierra y la Luna
Fuente: Video ¿y si no tuviéramos Luna? Discovery Channel

4. Hipótesis de impacto

La hipótesis del impacto parece ser la preferida en la actualidad. Supone que nuestro satélite se formó tras la colisión de la Tierra cuando ésta todavía era un protoplaneta con otro de aproximadamente el tamaño actual de Marte en los albores del sistema solar, el Dr. Jay Melosh ha realizado simulacros por computadora y han obtenido que nuestro protoplaneta chocó con Orfeo dos veces, primero con un ángulo bastante descentrado, prácticamente de rozón y nuevamente a los dos días un segundo impacto con los restos de dicho protoplaneta, lo que provoca la formación de un satélite de las dimensiones del nuestro, fuera de los límites de Roche, aproximadamente 24 000 km de distancia como lo muestra en las imágenes después del párrafo (Video: ¿y si no tuviéramos la Luna? de Discovery Channel). El impacto hizo que bloques gigantescos de materia saltaran al espacio para posteriormente y, mediante un proceso de acreción similar al que formó los planetas rocosos próximos al Sol, generar la Luna. Esta hipótesis también sostiene que el material lanzado es el que se encontraba en la corteza de ambos astros y los núcleos de ellos se fusionaron, lo cual explica la diferencia de densidades entre la Tierra y la Luna. El hecho que tengamos una Luna tan grande y tan cerca de nuestro planeta se debe a un evento verdaderamente fortuito, ya que tuvo que ocurrir el impacto a un ángulo preciso y a una velocidad precisa.

Imagen 3. Simulación del choque bastante descentrado entre los protoplanetas Tierra y Orfeo

Imagen 4.Simulación el protoplaneta Tierra después del primer impacto con Orfeo

Imagen 5. Simulación de la Tierra y la Luna dos días después del impacto con Orfeo

Otros elementos que apoyan esta hipótesis es que en la actualidad se ha comprobado que la Luna anteriormente se encontraba más cerca de la Tierra y que poco a poco se ha ido alejando, más rápido al principio por la velocidad de rotación y más lento en nuestros días como lo demuestran las medidas hechas continuamente a través de los reflectores láser puestos en la Luna por los astronautas, que muestran un alejamiento de 3.8 cm anuales. La Dra. Mangorie A Chan de la universidad de Yuta a través del estudio de rocas llamadas rignitas de mareas, ha encontrado que las mareas eran mucho más frecuentes, calculando que en la época de las rocas estudiadas el día solo duraba 18 horas, lo que comprueba que antes la Luna estaba más cerca de la Tierra.

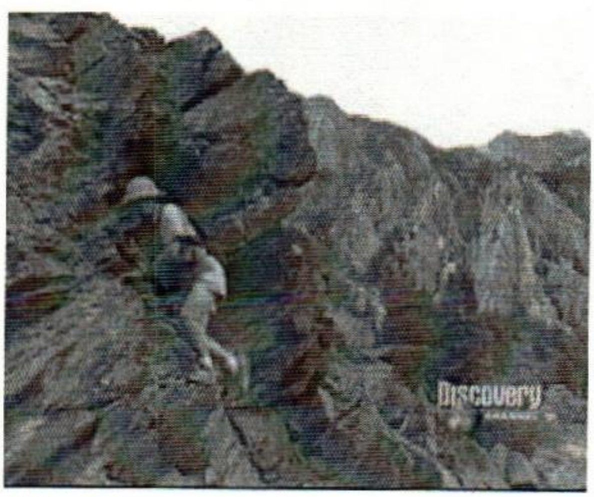


Imagen 6. Mangorie y las rocas rignitas de marea. Fuente Discovery Channel (Video ¿y si no tuviéramos la Luna?

Los eclipses de Sol también nos pueden indicar si la Luna se ha ido alejando de nuestro planeta, tan solo hace unos 2 mil años los días eran ligeramente más cortos que en la actualidad, por ejemplo, si la distancia fuera constante el eclipse solar del año 136 a. C. se hubiese visto en la franja más clara de la figura 1, ya que el día era una vigésima parte de segundo más corto, sin embargo de acuerdo a los datos históricos que se tienen, la franja de totalidad se amplió llegando hasta Babilonia como se indica en la franja más oscura de dicha figura, lo cual comprueba el alejamiento que continúa teniendo la Luna.

Figura 1. Franjas de eclipses del año 136 a. C. Fuente: Discovery Channel (Video ¿y si no existiera la Luna?)

5. Hipótesis de precipitación

Últimamente ha aparecido otra explicación a la que le han dado el nombre de 'Hipótesis de precipitación' según la cual, la energía liberada durante la formación de nuestro planeta, sobre todo con los grandes volcanes, calentó parte del material, formando una atmósfera caliente y densa, sobre todo compuesta por vapores de metal y óxidos. Estos se fueron extendiendo alrededor del planeta y, al enfriarse, precipitaron los granos de polvo que, una vez condensados, dieron origen al único satélite de la Tierra. El inconveniente de ésta hipótesis es el tamaño que deberían tener los volcanes para tener la suficiente fuerza para enviar el material tan alto y en tan poco tiempo para que se condensaran y formaran la Luna.

1.2.2 Movimientos de la Luna

La Luna presenta al igual que la Tierra dos tipos de movimientos, el de rotación y el de traslación. El de rotación lo hace una vez cada 27.32 días terrestres, es decir, un día lunar tarda 27.32 días terrestres, a éste se le llama mes sidéreo. El de traslación también tarda el mismo tiempo en darle una vuelta a la Tierra, razón por la cual siempre nos muestra la misma cara. Sin embargo, cuando la Luna completa una vuelta alrededor de la Tierra, ésta también se ha trasladado en su órbita alrededor del Sol, por lo que la Luna para completar una vuelta relativa al Sol tarda 29.53 días terrestres (mes sinódico), es decir, a la Luna le lleva dicho tiempo para alcanzar la misma posición en el cielo vista desde la Tierra. El mes sinódico es el que rige las fases lunares, los eclipses y las mareas lunisolares.

La Luna se traslada alrededor de la Tierra en sentido directo, es decir de Oeste a Este, lo cual hace que cada día la Luna lo veamos retrasarse alrededor de 12.19º con respecto al día anterior. Si la Tierra no rotase veríamos a la Luna avanzar hacia el Este en la bóveda celeste durante dos semanas y luego otras dos semanas desaparecería porque se encontraría en el lado opuesto de nuestro planeta, pero como la Tierra rota una vez cada 24 horas, el movimiento aparente de la Luna es de Este a Oeste, retrasando su salida alrededor de 50 minutos cada día.

Otros movimientos que se pueden notar en la Luna son los llamados de libraciones, los cuales son llamados así por analogía con las libras, es decir, con las balanzas de dos platos. La Luna al estar su órbita inclinada alrededor de 5º con respecto a la ecliptica permite ver más del 50% de su cara iluminada, ya que al pasar de un extremo al otro permite ver un poco más hacia las regiones polares, lo mismo ocurre en sus regiones orientales y occidentales, permitiendo ver hasta un 59% del total de la superficie lunar, pero nunca más del 50% a la vez. No es exactamente un movimiento de balanza, pero los primeros astrónomos que observaron dicho movimiento lo relacionaron con el de las balanzas (llamada libras) y le dieron el nombre de libraciones. Dicho movimiento también es influido por la velocidad variable que la Luna sigue en el transcurso de su órbita, debido a que su distancia a la Tierra varía constantemente y obedece a las mismas leyes que rigen el sistema solar.

Es importante recordar que aunque la Luna mantiene la misma cara dirigida hacia nosotros, no mantiene la misma cara dirigida hacia el Sol, y la idea de que hay un lado oscuro en la Luna es completamente errónea, la Luna tiene día y noche, solo que vista desde la Tierra siempre vemos la misma cara. La velocidad de rotación de la Luna se hizo rápidamente constante, pero la velocidad con la que viaja a lo largo de su trayectoria elíptica alrededor de la Tierra nunca lo ha hecho. La Luna se mueve más rápidamente cuando está cerca del perigeo y más lentamente en el apogeo. Por lo tanto la posición en la órbita y la cantidad de rotación se desfasan. El resultado es que, vista desde la Tierra, la Luna parece mecerse de un lado a otro.

La Luna en su movimiento describe alrededor de la Tierra una órbita elíptica, con la Tierra en uno de sus focos, por lo que la distancia entre los dos astros varía y también la velocidad en la órbita. Dado que la rotación lunar es uniforme y su traslación no, ésta última cumple con las leyes de Kepler. El plano de la órbita lunar está inclinado respecto a la Eclíptica 5º08'13" en promedio, aunque presenta ligeras variaciones, como se muestra en la siguiente figura 2.

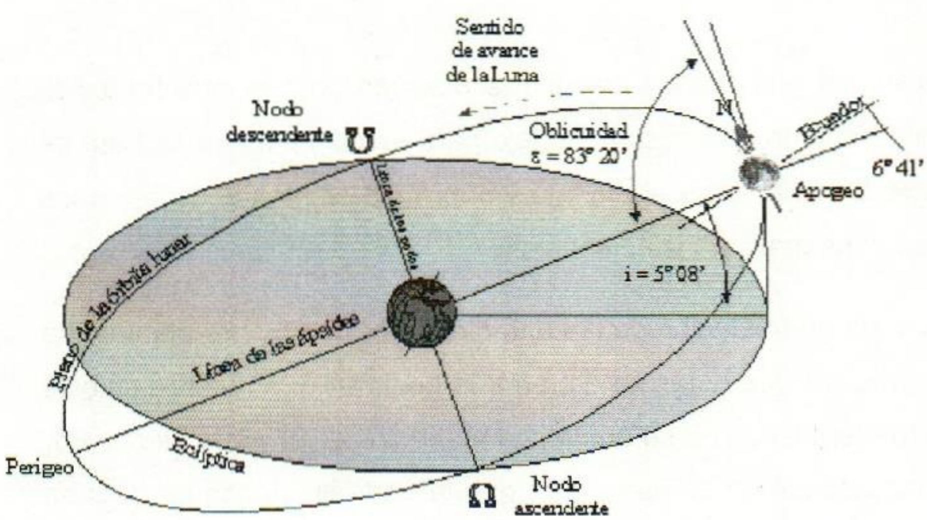


Figura 2. Inclinación de la órbita lunar respecto a la eclíptica. Fuente Gaitano, M. 2003

La órbita de la Luna es especialmente compleja. La razón es que ella está suficientemente lejos de la Tierra (384.400 km en promedio) que la fuerza de gravedad ejercida por el Sol es significante, así como la fuerza gravitacional de los demás planetas, sobre todo Venus, Marte, Júpiter y Saturno provocan ciertas perturbaciones a nuestro satélite. Dada la complejidad del movimiento, los nodos de la Luna, no están fijos, sino que dan una vuelta en 18,6 años. El eje de la elipse lunar no está fija y el apogeo y perigeo dan una vuelta completa en 8,85 años. La inclinación de la órbita varía entre 5° y 5° 18'. De hecho, para calcular la posición de la Luna con exactitud hace falta tener en cuenta por lo menos varios cientos de términos.

Además los apogeos y perigeos no alcanzan la misma distancia entre uno y otro, sino que éstos son variables, por ejemplo, durante el siglo XXI, estos presentarán los siguientes máximos y mínimos:

- **Perigeo** lunar: entre 356.375 km y 370.350 km
- **Apogeo** lunar: entre 404.050 km y 406.712 km

Esto nos permite ver que las distancias entre la Luna y la Tierra variarán como máximo 50 337 km y como mínima de 33 700 km, teniendo una mayor variación el perigeo que el apogeo.

Dado toda la complejidad que implica calcular la posición precisa que tendrá la Luna en un momento dado, lo más recomendable para estudios donde se trata de medir la influencia de la Luna sobre el planeta y sobre las plantas será tomar los valores medios y con ellos realizar las estimaciones.

Producto del movimiento de traslación de la Luna alrededor de nuestro planeta se tienen las fases lunares, ya que éstas se deben a la posición que nuestro satélite va adquiriendo con forme avanza en su órbita con respecto al Sol y a la Tierra. Por lo que un observador ubicado en la Tierra verá que la parte iluminada de la Luna cambia su tamaño día a día y que éstas se repiten en un tiempo aproximado de cada 30 días, la imagen 7 representa las diferentes fases de la Luna en el transcurso de un mes sinódico.

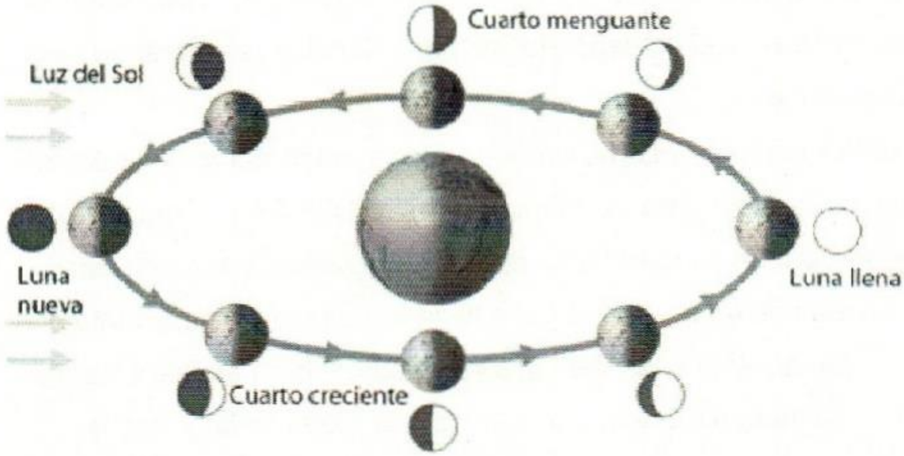


Imagen 7. Fases lunares. Fuente Mozilla – Firefox 2009

- **Luna nueva**, iniciamos la descripción de las fases lunares a partir del novilunio. En esta fase la Luna queda entre el Sol y la Tierra, por lo que la cara no iluminada por el Sol da hacia nuestro planeta y no lo podemos ver a simple vista, sale y se oculta con el Sol por lo que no es posible verlo ni de día ni de noche, excepto cuando hay un eclipse solar. Conforme pasan las horas la Luna se va desplazando en su órbita y formando un ángulo con respecto al Sol y la Tierra (12.19º diarios), cuando dicho ángulo es suficiente que normalmente ocurre al segundo día después del novilunio, se empieza a mirar la Luna en forma de cuerno por el atardecer, y cada día se irá retrasando 50 minutos aproximadamente. Muchas culturas consideran el primer día del mes sinódico, el día en que se ve por primera vez la Luna al atardecer en el poniente. Con forme transcurren los días la parte iluminada de la Luna va aumentando su tamaño, por lo que se considera Luna creciente.

- **Cuarto creciente**, después de transcurridos aproximadamente un cuarto de tiempo del mes sinódico a partir del novilunio, la Luna forma un ángulo de 90º con el Sol y la Tierra, por lo que un observador terrestre mirará la Luna iluminada exactamente a la mitad de la cara, a lo que se le llama cuarto creciente, en esta fase sale aproximadamente a las 12 del día y se oculta pasado las 12 de la noche. Con forme los días siguen transcurriendo la Luna sigue aumentando el tamaño de su parte iluminada, tomando una forma gibosa creciente.

- **Luna Llena,** esta fase lunar ocurre alrededor de la mitad del mes sinódico, forma un ángulo de 180° con respecto al Sol y la Tierra y muestra al observador terrestre toda su cara iluminada, excepto cuando hay un eclipse total de Luna, a esta fase se le llama Luna llena o plenilunio y se levanta en el oriente aproximadamente a las 6 de la tarde y se ocultará al siguiente día cerca de las 7 de la mañana, por lo que ilumina a la Tierra toda la noche
- **Cuarto menguante,** la Luna continúa su marcha y el ángulo que forma con respecto al Sol y a la Tierra empezará a reducirse por lo que día a día se verá que la Luna disminuye su tamaño (gibosa decreciente), ocultando la parte que fue mostrando en su período creciente, hasta que nuevamente forma un ángulo de 90° con respecto al Sol y la Tierra y mostrará al observador terrestre la mitad de la cara, la cual está iluminada para dicho observador, dicha fase se le llama cuarto menguante, porque la Luna está decreciendo, en esta etapa la Luna sale alrededor de las 12 de la noche y se ocultará cerca de la una de la tarde, por lo que solo iluminará a la Tierra después de la media noche.
- **Luna nueva,** la Luna continúa su recorrido y su tamaño continuará disminuyendo día a día hasta que desaparezca totalmente llegando al novilunio en un tiempo total de 29.53 días y nuevamente se repite el ciclo.

Producto de la dinámica del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra y de la Tierra alrededor del Sol, la naturaleza nos regala uno de los espectáculos naturales más bellos producidos por ella, los eclipses tanto lunares como solares. Estos fenómenos naturales seguramente impresionaron grandemente a los hombres primitivos y fueron motivos de grandes ceremonias y desde luego de la necesidad de predecirlos. Una de las culturas que tienen registrados uno de los eclipses más antiguos, es la maya, que data del 15 de febrero del año 3379 a. C.

(Astronomia maya, Mozilla – Firefox) esta cultura tenía su propio calendario solar y conocían la periodicidad de los eclipses.

¿Qué es un eclipse?, un eclipse es el oscurecimiento de un cuerpo celeste por otro. Como los cuerpos celestes no están fijos en el firmamento, a veces la sombra que uno proyecta tapa al otro, por lo que éste último se ve oscuro.

En un eclipse los centros del Sol, la Tierra y la Luna están totalmente alineados, estando la Luna siempre cerca de la línea que une la Tierra y el Sol. Si la órbita de la Luna estuviese sobre la eclíptica (plano de la órbita de la Tierra), en cada mes lunar habría un eclipse de sol durante el Novilunio y un eclipse de luna durante el Plenilunio al cabo de unos 15 días. En realidad el plano de la órbita lunar está inclinado respecto a la eclíptica en promedio un ángulo de 5°08'13", lo que provoca, la mayoría de las veces, que la Luna pase por encima o por debajo del Sol o por arriba o debajo del cono de sombra de la Tierra sin que tenga lugar el eclipse. Solo habrá eclipses en las conjunciones y oposiciones del Sol y la Luna cuando el Sol esté cerca de los Nodos de la Luna o puntos en que la órbita lunar corta a la Eclíptica. Por lo cual los eclipses solares siempre ocurrirán en el novilunio, en tanto que los eclipses lunares tendrán lugar en la Luna llena.

Eclipse solar

Existe eclipse solar en un lugar de la Tierra, cuando la Luna oculta al Sol, desde ese punto de la Tierra. Esto solamente ocurre en Luna Nueva y pueden ser de tres tipos:

- **Parcial**: la Luna no cubre por completo el disco solar, el cual aparece como creciente.
- **Total**: desde una franja (banda de totalidad) en la superficie de la Tierra, la Luna cubre totalmente al Sol. Fuera de la banda de totalidad el eclipse es parcial. Se verá un eclipse total para los observadores situados en la Tierra que se encuentren dentro del cono de sombra lunar, cuyo diámetro máximo sobre la superficie de nuestro planeta no superará los 270 km, y que se

desplaza en dirección este a unos 3.200 km/h. La duración de la fase de totalidad puede durar varios minutos, entre 2 y 7.5, alcanzando algo más de 2 horas todo el fenómeno.

- **Anular**: ocurre cuando la Luna se encuentra cerca del apogeo y su diámetro angular es menor que el solar, de manera que en la fase máxima, permanece visible un anillo del disco del Sol, tiene una duración máxima de 12 minutos y hasta de 4 horas todo el fenómeno.

Para que se produzca un eclipse solar la Luna ha de estar en o próxima a uno de sus nodos, y tener la misma longitud celeste que el Sol.

Cada año suceden en nuestro planeta al menos dos eclipses de Sol y un máximo de 5. Suceden 5 eclipses solares en un año cuando el primero de ellos tiene lugar poco tiempo después del primero de enero. Entonces el segundo tendrá lugar en el novilunio siguiente, el tercero y el cuarto sucederán antes de que transcurra medio año, y el quinto tendrá lugar pasados 345 días después del primero, puesto que ese es el número de días que contienen 12 meses sinódicos. A pesar de que en la Tierra se pueden apreciar el número de eclipses descritos líneas arriba, en término medio sucede un eclipse total de Sol en el mismo lugar de la Tierra en un período de 200-300 años. Para que suceda un eclipse de Sol, es preciso que la Luna esté en conjunción inferior (Luna nueva) y además que el Sol se encuentre entre los 18º 31´ y 15º 21´ de uno de los nodos de la órbita lunar.

Eclipse lunar

Cuando la Tierra se interpone entre el Sol y la Luna se dan los eclipses lunares. Antes de ver los tipos de eclipses lunares que se dan es necesario entender que la Tierra proyecta dos tipos de sombra, una llamada umbra que es la parte más oscura de la sombra y que vista desde el espacio no deja ver ninguna parte del Sol y la penumbra que es más clara y que permite mirar parte del Sol desde el espacio donde está proyectada, esto provoca que existan tres tipos de eclipses: parcial, cuando parte de la Luna pasa por la penumbra de la sombra de la Tierra;

total cuando dicho astro pasa por la umbra proyectada por nuestro planeta y cuando toda la Luna pasa por la penumbra se le llama eclipse penumbral.

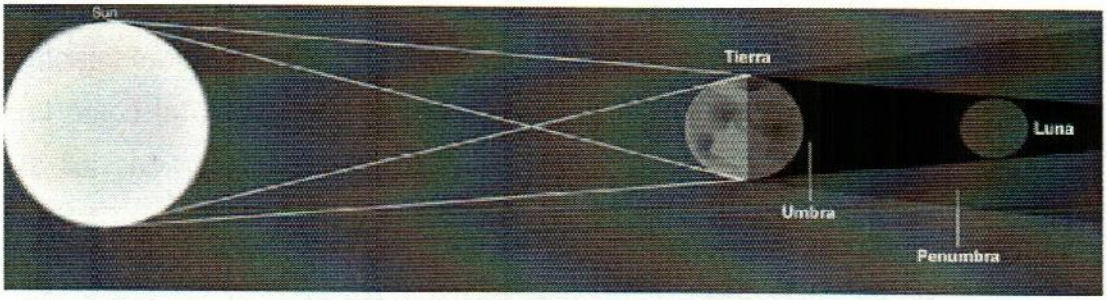


Imagen 8. Geometría del eclipse lunar. Fuente Wikipedia 2009.

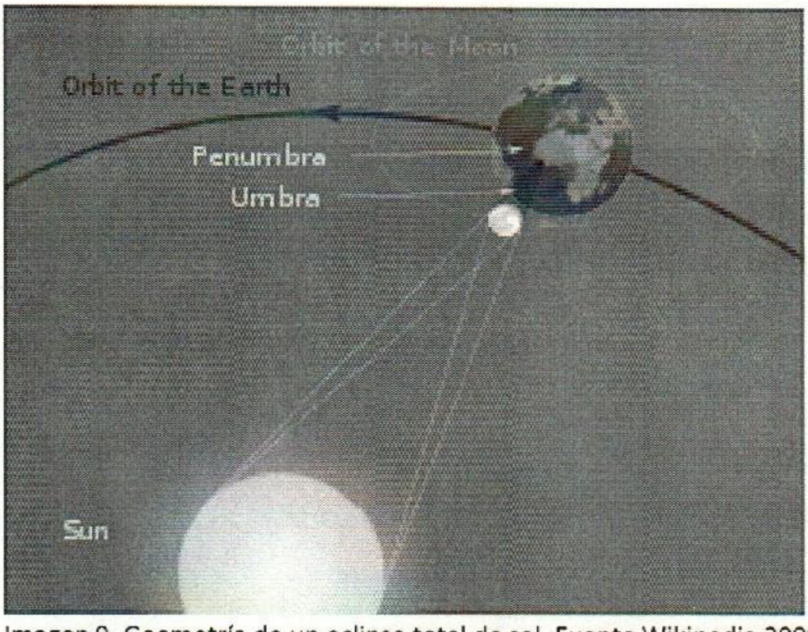


Imagen 9. Geometría de un eclipse total de sol. Fuente Wikipedia 2009

1.2.3 Luna y el eje de rotación de la Tierra

Nuestra Luna parece ser especial, y tiene un papel esencial en la evolución de la vida en nuestro planeta. La Luna estabiliza la inclinación del eje de la Tierra, que es actualmente de 23 grados y no varía en más de un grado. Si la Luna no hubiera estado presente, esta inclinación habría variado notablemente, y la situación climática sería muy diferente. Comparemos esto con Marte, que no tiene un satélite comparable; sus dos acompañantes, Fobos y Deimos, son tan pequeños que su influencia es despreciable. No hay entonces fuerza estabilizadora, y la inclinación del eje marciano varía entre 11 y 35 grados durante un ciclo de aproximadamente 100.000 años. La evolución de la vida depende de la estabilidad a largo plazo del clima. Si el eje de rotación de la Tierra variara exageradamente durante un corto periodo, esta estabilidad estaría ausente y la vida tal como la conocemos no se habría desarrollado. Parece que debemos estar agradecidos a la Luna por hacer posible nuestra existencia (Gaitano, 2003).

Otros autores como el astrónomo Dr. Jacques Laskar coinciden totalmente en el papel que juega la Luna en la estabilidad del eje de rotación de la Tierra, al respecto dice: "si no tuviéramos a la Luna, el eje de la Tierra variaría en forma caótica entre 0 y 90º y los cambios climáticos serían totalmente drásticos, podría decirse que la Luna es el regulador climático de la Tierra (Video, ¿y si no tuviéramos la Luna? Discovery Channel). Según la bióloga evolucionista Dra. Lynn Rothschild tendríamos veranos increíblemente calurosos, en tierra firme, hablamos hasta de 100 ºC por encima de la temperatura de ebullición del agua, los inviernos sufrirían temperaturas por debajo de los niveles de congelación, incluso más fríos que el hielo seco, temperaturas increíblemente bajas.

El efecto más obvio de la Luna sobre la Tierra está en las mareas que provoca. La fricción que éstas causan frena la rotación de la Tierra, y este proceso continúa hoy. Un efecto igualmente importante es el aumento de la separación entre la Tierra y su satélite; la distancia entre ellos está aumentando a una velocidad de 3.8 centímetros por año. Como cabría esperar, la Tierra tiene un efecto similar sobre la Luna, y puesto que la masa de la Tierra es 81.3 veces la de ésta, su influencia ha sido aún mayor. Hace mucho tiempo la rotación de la Luna fue frenada por las mareas hasta que quedó síncrona, lo que significa que su periodo de rotación se hizo exactamente igual a su periodo traslación. El resultado es que la Luna siempre presenta la misma cara a la Tierra.

1.2.4 La Tierra y sus movimientos

La Tierra, al igual que los demás planetas del sistema solar está en constante movimiento en el espacio, aunque se han detectado alrededor de 10 tipos de movimientos, en el presente subtema solo abordaremos cuatro: rotación, traslación, precisión y nutación.

Rotación es un movimiento que efectúa nuestro planeta girando sobre sí mismo a lo largo de un eje ideal denominado Eje terrestre que pasa por sus polos. Una vuelta completa, tomando como referencia a las estrellas, dura 23 horas con 56 minutos y 4 segundos y se denomina día sidéreo. Si tomamos como referencia al Sol, el mismo meridiano pasa frente a nuestra estrella cada 24 horas, llamado día solar, los 3 minutos y 56 segundos de diferencia se deben a que en ese lapso de tiempo la Tierra ha avanzado en su órbita y ésta debe de girar algo más que un día sideral para quedar en la misma posición que un día anterior respecto al Sol.

La rotación de la Tierra es de Oeste a Este y determina el día y la noche, este movimiento hace que tengamos la impresión que el Sol, la Luna y en general los planetas y estrellas giran alrededor de la Tierra en dirección oriente – poniente.

La Tierra al rotar, su eje terrestre, presenta una inclinación de 23 grados en promedio respecto a la eclíptica, fenómeno denominado oblicuidad de la eclíptica. Esta inclinación es la responsable de largos meses de luz y oscuridad en los polos geográficos y de las estaciones del año, causadas por el cambio del ángulo de incidencia de la radiación solar, lo que provoca que durante el año hayan días más largos y noches más cortas y viceversa, siendo más pronunciadas conforme mayor sea la latitud.

Traslación es un movimiento por el cual la Tierra se mueve alrededor del Sol. La causa de este movimiento es la acción de la gravedad, originándose cambios que, al igual que el día, permiten la medición del tiempo. Tomando como referencia el Sol, resulta lo que se denomina año tropical, lapso necesario para que se repitan las estaciones del año; dura 365 días, 5 horas y 47 minutos. El movimiento que describe es una trayectoria elíptica de 930 millones de kilómetros a una distancia media del Sol de 149 675 000 km llamada Unidad Astronómica U.A. De esto se deduce que el planeta se desplaza con una rapidez media de 106.000 kilómetros por hora o, lo que es lo mismo, 29,5 kilómetros por segundo.

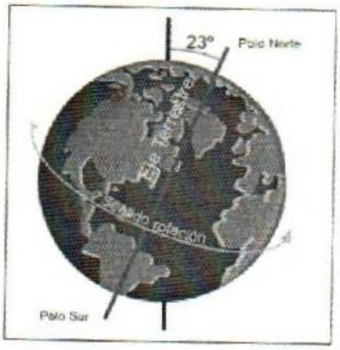


Imagen 10. Inclinación del eje de rotación terrestre. Fuente Wikipedia 2009.

El Sol ocupa uno de los focos de la elipse y, debido a esta excentricidad, la distancia entre el Sol y la Tierra varía a lo largo del año. A primeros de enero se alcanza la máxima proximidad al Sol, produciéndose el perihelio, donde la distancia es de 147,5 millones de km, mientras que a primeros de julio se alcanza la máxima lejanía, denominado afelio, donde la distancia es de 152,6 millones de km.

1.3 Astronomía: breve historia.

La astronomía (del griego: αστρονομία = άστρον + νόμος, etimológicamente la "Ley de las estrellas") es la ciencia que se ocupa del estudio de los cuerpos celestes, sus movimientos, los fenómenos ligados a ellos, su registro y la investigación de su origen a partir de la información que llega de ellos a través de la radiación electromagnética o de cualquier otro medio (Wikipedia, 2009).

Como se puede deducir de la definición anterior, la astronomía es una ciencia muy amplia, sin embargo para los fines de la presente investigación, sólo se realiza una breve historia de algunas ramas o subramas de esta ciencia que permita de alguna manera relacionar las creencias que las comunidades campesinas tienen sobre el efecto de luna con lo que en dicha ciencia se ha descubierto.

1.3.1 Historia de la astronomía

La Astronomía nació casi al mismo tiempo que la humanidad. Los hombres primitivos seguramente se maravillaron con el espectáculo que ofrecía el firmamento y los fenómenos que allí se presentaban. Ante la imposibilidad de explicarlos, éstos lo asociaron a la magia, buscando en el cielo la razón y la causa de los fenómenos sucedidos en la Tierra, naciendo así la astrología, si bien es cierto que la astronomía y la astrología comparten su origen, éstas son muy diferentes, en tanto la astronomía busca explicar el universo de manera científica, la astrología se fundamenta en las supersticiones, sin embargo en los inicios de las civilizaciones la astrología tenía supremacía sobre la astronomía por el poder que daba el "saber leer los destinos" en las estrellas, inclusive actualmente hay muchas gentes supersticiosas y que están atentas a sus horóscopos o bien consultan astrólogos para que les lean sus destinos.

Muchos años de observación del cielo sentaron las bases científicas de la Astronomía con explicaciones más aproximadas sobre el universo. Sin embargo, las creencias geocentristas basadas en los movimientos aparentes de los astros y apoyadas por grupos religiosos y políticos impusieron durante veinte siglos este sistema, impidiendo además el análisis y estudio de otras teorías.

A continuación se describe la astronomía desarrollada desde la antigüedad y por algunas culturas en diferentes partes del mundo, sobre todo las que han dejado rastros arqueológicos de ella.

1.3.2 La astronomía antigua.

El hombre desde el momento en que aparece sobre la superficie terrestre tiene una serie de necesidades que satisfacer para poder sobrevivir, entre ellas las de alimentarse, protegerse de las inclemencias del tiempo y sus depredadores, orientarse, por mencionar algunas. Al ser en sus inicios grupos humanos nómadas cazadores – recolectores, tenían que saber en donde había alimentos para poder dirigirse hacia ellos, lo cual implicaba la necesidad de orientarse y el Sol, la Luna y las estrellas le permitieron hacerlo, ya que éstos siempre salen por el oriente y se ocultan por el occidente y se desplazan de manera bastante uniforme.

Pronto, el conocimiento de los movimientos cíclicos del Sol, la Luna y las estrellas mostraron gran utilidad para la predicción de fenómenos como el ciclo de las estaciones del año y con ello predecir la época de frío, calor, lluvias, etc. de cuyo conocimiento dependía la supervivencia de cualquier grupo humano. Cuando la actividad principal era la caza, era trascendental predecir el instante en el que se producía la migración estacional de los animales que les servían de alimento y a donde se dirigían, posteriormente, cuando nacieron las primeras comunidades agrícolas, era fundamental conocer el momento oportuno para sembrar y recoger las cosechas.

La necesidad de predecir las mejores épocas de siembra y cosecha llevó a las primeras civilizaciones a la creación de los primeros calendarios, los cuales están basados en los desplazamientos aparentes del Sol hacia el sur y hacia el norte y que regulan la duración de las horas de luz solar en el día y las de oscuridad en las noches. Las fases lunares también juegan un papel importante en la mayoría de los calendarios, ya que el satélite regula la cantidad de luz por las noches y sus fases son muy visibles a simple vista y rápidas en su evolución, lo cual llevó a establecer los meses lunares alrededor de los 30 días.

En los siguientes subtemas se revisan algunos estudios arqueoastronómicos que se han realizado en algunas culturas tanto en el viejo continente como en el nuestro, ya que se han encontrado en la mayoría de las antiguas construcciones que éstas presentan una orientación hacia los puntos cardinales o bien hacia los puntos extremos de los movimientos del Sol o de la Luna, lo cual es una prueba del conocimiento astronómico que poseían dichas civilizaciones.

1.3.3 Arqueoastronomía en la Europa antigua.

En las primeras civilizaciones de Europa, los arqueoastrónomos han encontrado que en Stonehenge Inglaterra, Carnac Francia e Isla Lewis Escocia, sus habitantes tuvieron conocimientos avanzados y sorprendentes de los movimientos de los astros, matemáticas y geometría práctica. En estos lugares se tienen grandes menhires (construcción prehistórica consistente en una piedra alargada colocada verticalmente ocasionalmente antropomorfas; su principal función era rendir culto al Sol o la Luna.) para la práctica de la astronomía observacional lo cual les permitió crear los primeros calendarios europeos, determinar los solsticios y equinoccios y predecir los eclipses.

Stonehenge, mucho tiempo fue considerado como un lugar para eventos religiosos o monumentos funerarios, sin embargo, los resultados arrojados por el proyecto *Stonehenge Riverside*, dirigido por el arqueólogo Mike Parker Pearson de la Universidad de Sheffield y el astrónomo Gerald Hawkins, encontraron que en el solsticio de verano e invierno, el Sol desde su salida hasta su puesta atraviesa justo el eje de la construcción, además el círculo de piedras, que se dividía en 56 segmentos, podía utilizarse para determinar la posición de la Luna a lo largo del año y con ello poder predecir los eclipses solares, lo que hace suponer que los constructores tenían amplios conocimientos de astronomía (Wikipedia, 2009).

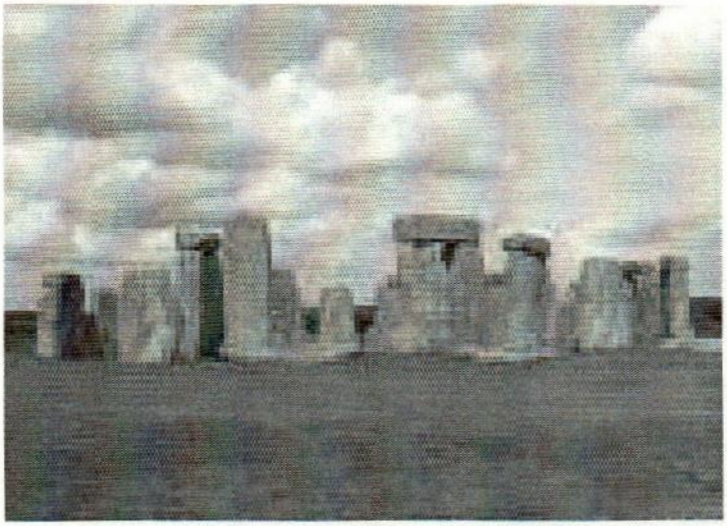


Imagen 11. Stonehenge, 3500 – 2500 a. C. Fuente: Wikipwdia 2009

Carnac es el monumento prehistórico más extenso del mundo, abarcando una superficie total de 40 hectáreas en donde se encuentran alrededor de 4000 menhires, localizado al norte de Francia cerca del pueblo del mismo nombre.

Desde antaño han existido varias hipótesis tratando de explicar la presencia de tantos menhires en Carnac, algunas poco fundamentadas como las que plantean que eran vestigios del diluvio, restos de un campamento romano, balizas para la navegación, los restos fósiles de una gran serpiente que murió en dicho lugar, o avenidas a un templo que ahora no existe y una de las más aceptadas había sido que cada uno de los menhires eran tumbas de una gran necrópolis, sin embargo, el escribano francés Jacques Cambry fue el primero que se aventuró, en 1794, a decir que podría tener una relación con los cuerpos celestes. En 1970, el ingeniero inglés Alexander Thom retomó la idea y aplicó a Carnac los estudios que el astrónomo Gerald Hawkins había realizado sobre Stonehenge. Afirmó que Carnac es un observatorio astronómico, donde las hileras de menhires y sus perpendiculares están orientadas hacia los puntos solsticiales y equinocciales de salida del Sol, creando así un calendario que permitía predecir las etapas importantes de la vida agrícola (Wikipedia 2009).

Imagen 12. Carnac 4500 3500 a. C. Fuente: Wikipedia 2009

En la Isla de Lewis y en las islas hébridas de Escocia sus primeros pobladores arribaron hace unos seis mil años, se cree que eran una comunidad agraria que explotaban los poderes de la naturaleza de manera respetuosa, además eran grandes observadores de la Luna, como lo manifiestan las rocas de Kalani's. Estas constituyen un calendario lunar que permite predecir las fases lunares, el mes sinódico y lo más extraordinario el ciclo de aproximadamente 18 años y medio de la Luna.

Imagen 13. Rocas de Kalani's. Fuente: Video La Luna y su influjo

Estas rocas son una especie de sintonizador lunar que predice cuando el astro alcanzará su posición más baja en el cielo. Esto ocurre cada 18 años y medio, cuando la Tierra y la Luna se alinean, es entonces cuando la Luna Llena se alza por detrás de la Bella Durmiente para transitar sobre su cuerpo y después desaparecer detrás de las montañas más elevadas. Media hora después la Luna reaparece por un valle glacial más al sur y fugazmente vuelve a iluminar las rocas. Se dice que en este momento la madre tierra se muestra fielmente ante los que observan la Luna de Kalani's (Video La Luna y su influjo).

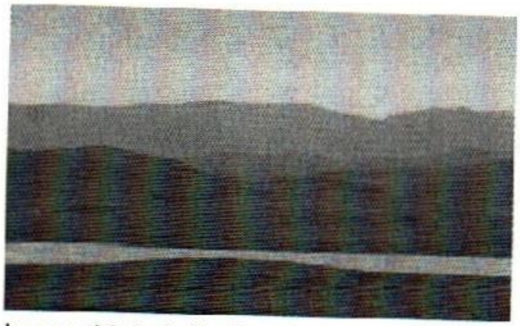


Imagen14: La bella durmiente
Fuente: Video La Luna y su influjo

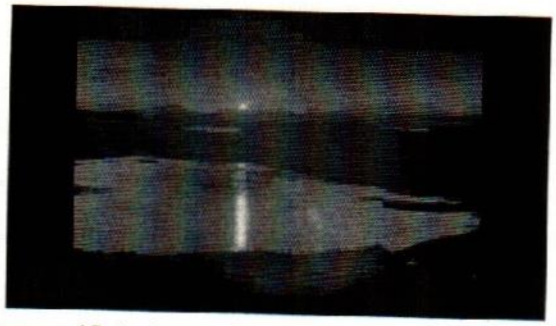


Imagen 15. La Luna a los pies de la bella durmiente
Fuente: Video La Luna y su influjo

Imagen 16y 17. La Luna transitando sobre la bella durmiente. Fuente: Video La Luna y su influjo

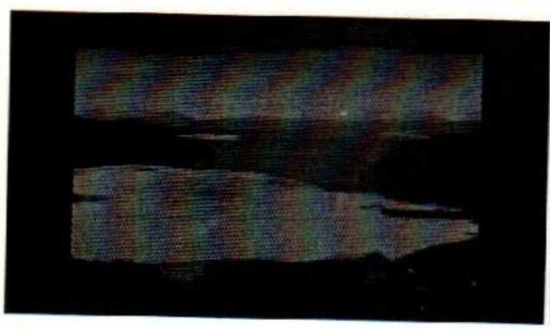


Imagen 18 y 19. Final del recorrido de la Luna sobre la bella durmiente. Fuente: Video La Luna y su influjo

Como puede verse, la asqueoastronomía está postulando nuevas hipótesis que tratan de explicar la relación que existía entre las antiguas construcciones y la astronomía y para nuestra investigación elementos que permiten ver la relación que existe desde antaño de la astronomía con las actividades agrícolas, ya que el objetivo final era predecir las mejores épocas de siembra y cosecha de sus cultivos y como a través de de los arreglos de rocas lograban representar sus calendarios.

1.3.4. La arqueoastronomía en Egipto.

Una de las culturas más antiguas conocidas en el mundo es la egipcia, y sobre todo la desarrollada en el antiguo Egipto. Lo más conocido son sus grandes pirámides, sin embargo, en este breve subcapítulo, haremos más énfasis en los hallazgos arqueoastronómicos en la ciudad de Menfis, capital y residencia de los faraones del Imperio Antiguo, situada en el vértice del Nilo, entre el bajo y el alto Egipto.

Las pirámides construidas en dicha parte de Egipto, al igual que las edificadas en otros lugares de su territorio, tienen las caras orientadas hacia cada uno de los puntos cardinales, los palacios en cambio se orientaron hacia alguna constelación y las tumbas de los faraones dan hacia las estrellas circumpolares, esto último por considerar que estas estrellas permanecían inmóviles en el transcurso del tiempo y por lo tanto representaban perpetuidad. Estas características de sus construcciones y tumbas nos indican el conocimiento que los egipcios tenían de los movimientos aparentes del Sol, de las constelaciones y de las estrellas circumpolares.

Menfis, situada en la ribera occidental del Nilo abarca una longitud de unos 30 Km. El conjunto de cementerios que la constituyen son: Dashur, Saqqara, Abusir, Zawyet el-Aryan, Gizeh y Abu Rawash. Lo más característico de estos cementerios fueron las pirámides. Asimismo, un factor muy importante de este periodo fue el culto solar. La pirámide en sí, probablemente fuese un símbolo solar. Incluso, muchos de los soberanos de la V dinastía, edificaron un templo solar que formaba parte de su complejo funerario (Martínez, 2002).

En Menfis, el Sol era observado no solo al salir y al ocultarse, sino también su recorrido durante el día, siendo otro punto importante el cenit. En estos puntos importantes se le daban nombres específicos considerados como Dios, así se tiene: al amanecer se le llamaba el Dios Khepri, al mediodía el Dios Ra y al atardecer el Dios Atum. Justo delante de las patas de la Esfinge existe un templo dedicado al Sol, en sus tres manifestaciones.

En Menfis se ha comprobado que en las construcciones de sus pirámides se uso el triángulo sagrado egipcio, también conocido como triángulo 3 - 4 - 5, que por sus dimensiones forma un triángulo rectángulo y que les permitió dar a las pirámides la pendiente en cada una de sus caras. Como dicha ciudad se sitúa alrededor del paralelo 30º del globo terrestre, cuando el Sol del solsticio de invierno, alcanza su altura máxima se producen varios fenómenos curiosos que tuvieron alguna repercusión sobre los habitantes del país del Nilo. Uno de ellos es precisamente la formación de triángulos sagrados de los objetos con su sombra, especialmente los alargados, como obeliscos, o incluso el de las sombras de las personas de pie.

En Menfis, por estar a una latitud de aproximadamente 30º, exactamente 29º50' en el solsticio de invierno al medio día las sombras proyectadas por cualquier objeto alargado que se encuentre en forma vertical producirá una sombra que forma el triángulo sagrado egipcio, como se muestra en la siguiente figura:

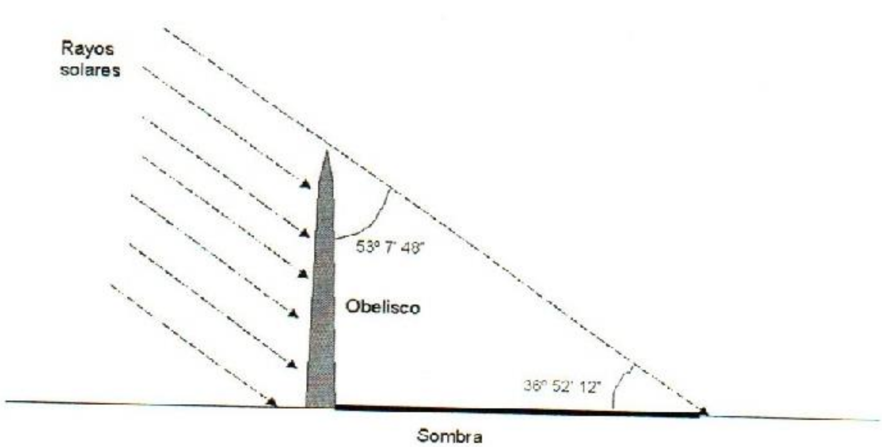


Figura 3. Triángulo sagrado egipcio. Fuente: Martínez, A. 2002

Esto se ha observado que se aplicó en la construcción de las pirámides, lo cual hizo que la cara sur de éstas, tuviesen una pendiente como la formada por la hipotenusa del triángulo sagrado y por su latitud en el solsticio de invierno los rayos solares inciden perpendicularmente sobre dicha cara.

En cualquier época del año, a la salida del Sol, la cara sur de las pirámides es la más expuesta a las radiaciones solares, especialmente a mediodía, produciendo un enorme brillo en los pulidos bloques de revestimiento. Sin embargo, en las fechas próximas al solsticio del invierno, esta cara de las pirámides (Basadas en el triángulo 3-4-5) dejará de producir reflejos a nivel de la superficie terrestre, puesto que la radiación incidente produce radiación reflejada en la misma dirección en que le llega.

La desaparición del brillo a mediodía, en la cara sur de las pirámides, indicaría la llegada de los días más cortos del año. Este hecho, que en principio es consecuencia de la inclinación de las pirámides y de su ubicación en el globo terrestre, contrastaría con la formación de los triángulos sagrados de los objetos o personas con sus sombras en esta fecha astronómica tan especial.

Con las observaciones detenidas del firmamento y sus métodos de medición del comportamiento del movimiento de los cuerpos celestes, reflejados en sus construcciones sobre todo piramidales, los egipcios lograron crear un calendario solar de 365 días que les permitió predecir las fechas en las que deberían sembrar y cosechar, sobre todo tomando en cuenta que el Nilo anualmente se desborda y para dichas fechas las cosechas ya deberían estar levantadas y en el caso de las siembra debería realizarse en la época adecuada tanto para que no fuesen afectadas por inundaciones tardías como para permitir levantar las cosechas antes de la llegada de las primeras crecidas.

1.3.5 Astronomía babilónica

La cultura babilónica desarrollada en Mesopotamia, es junto con la egipcia una de las más antiguas del mundo, de ésta heredamos la mayor parte de los nombres de las constelaciones, el número de horas del día, los días de los meses, la cantidad de meses del año, entre otras cosas. Lo anterior se explica en que dicha cultura influyó fuertemente sobre la cultura griega y ésta sobre la nuestra.

Los astrónomos babilónicos fueron extraordinarios observadores del tiempo que tardaba la Luna en su traslación en su órbita, de los desplazamientos aparentes del Sol y de las revoluciones sinódicas de los planetas (el tiempo que les lleva para tener dos posiciones similares con respecto a la Tierra), destacando la exactitud con que midieron dichos movimientos, por ejemplo: la duración media del mes sinódico lo calcularon en 29,530641 dìas según Naburi'Annu a finales del siglo III a.C. o de 29.530594 días según Kidinnu en el año 380 a.C. el valor moderno es de 29,530589 días; el valor hallado en el siglo II ó I a.C. para la revolución sinódica de Venus fue 583,91 días en lugar de 583,92 días que es el actual y para Marte 779,995 días en lugar de 779.94 días y el año solar en 365.25 días.

Lo interesante es preguntarse ¿cómo lograron obtener datos tan aproximados a los reales si no contaban con los instrumentos actuales?, para poder acercarnos a la respuesta veamos como lograron determinarlo.

Los babilónicos eran astrónomos empíricos pero que observaron el movimiento de la Luna, el Sol y los planetas y los registraban en forma continua, contando con dos instrumentos básicos, una especie de gnomon que consiste en un instrumento en forma de baliza o poste que se coloca verticalmente y se sigue en el transcurso del día la trayectoria de su sombra, lo cual permite ver el comportamiento del Sol a lo largo de un año, y como se repite el ciclo se puede medir el número de días del total del ciclo y de las estaciones del año; otro instrumento utilizado fue la Clepsidra o reloj de agua, este instrumento inventado alrededor del año 1400 a.C. les permitió medir el tiempo. La Clepsidra era una vasija que se le llena de agua y a través de un pequeño orificio se descarga el fluido, dicho instrumento se graduaba para medir el tiempo que le llevaba vaciarse, las más sofisticadas tenían marcas para ir midiendo los tiempos intermedios. Además contaron con una herramienta aún más poderosa – las matemáticas – todas las observaciones empíricas lo fueron matematizando y lograron establecer parámetros tan cercanos a los actuales como los casos expuestos, gracias a que a través de la acumulación de muchas observaciones lograron promediarlas, lo cual les permitió obtener bastante precisión.

Los babilónicos conocían bastante bien los movimientos aparentes de la Luna y el Sol, lo cual les permitió estudiar los eclipses, tan es así que son ellos los que tienen registrado el eclipse solar más antiguo que se tenga plenamente documentado que ocurrió el 15 de junio del año 763 a. C., pero en el siglo III a. C. descubrieron el ciclo de Saros, el cual equivale a 218 meses sinódicos o sea 18 años y 11.3 días, período en el que se repiten las lunaciones. Este ciclo actualmente se sigue utilizando en la predicción de los eclipses tanto lunares como solares.

1.3.6 Arqueoastronomía mesoamericana

En el territorio que hoy conocemos como Mesoamérica que comprende gran parte de México, Guatemala, Belice y Honduras, florecieron durante varios milenios numerosas culturas; éstas, aunque con características particulares locales, compartieron muchas peculiaridades de diversa índole. Con el paso del tiempo se conformó y acrecentó un acervo cultural común, el cual incluyó a la Astronomía. Se cree que las bases conceptuales y las prácticas astronómicas se establecieron desde el período Preclásico (1500 a. C. – 200 d.C.) a través de la cultura Olmeca, considerada como creadora de la escritura jeroglífica y del inicio de la cuenta calendárica que consideraba una fecha inicial de referencia, lo cual sentó las bases para el desarrollo de una cultura mesoamericana en general (Galindo, 1992).

El calendario mesoamericano se basa en el movimiento aparente del Sol, el cual era considerado desde un principio fuente principal de luz y calor, y como factor del ritmo de vida de la sociedad y convertido en la principal deidad de dicha cultura, por lo que era adorado. A partir de la observación, al principio contemplativa, fue evolucionando hasta convertirse en una actividad altamente especializada de un grupo selecto de astrónomos – sacerdotes, quienes en el transcurso de varios siglos elaboraron técnicas de observación y sistemas calendáricos que fueron la base de la organización social.

Cabe preguntarse, ¿qué instrumentos usaron los mesoamericanos para lograr el calendario solar más preciso de su época?. Según Yurevich, el principal instrumento usado fue el gnomon, el cual consiste en un poste vertical situado en una plazoleta donde están marcadas las posiciones de su sombra en diferentes días y horas. Este instrumento sencillo pero efectivo, les permitió observar con bastante precisión los solsticios tanto de verano como de invierno, así como los equinoccios. Una vez que el gnomon les permitió identificar los puntos extremos del Sol en su movimiento aparente, tanto en su salida como en su ocultamiento y cenit, los mesoamericanos lograron conjuntar sus conocimientos matemáticos, astronómicos y arquitectónicos, y expresarlos en grandes construcciones.

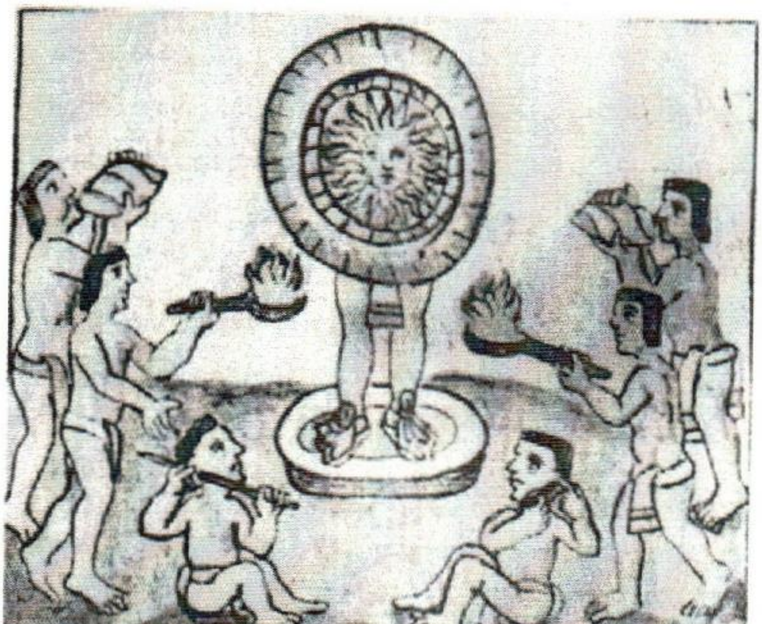


Figura 4. Culto al Sol (Tonatiuh) en el México antiguo. Códice Florentino
Fuente: (Galindo, 1990, p 35)

Uno de los vestigios más obvios de observación astronómica en Mesoamérica, lo constituye el alineamiento de estructuras arquitectónicas. La orientación medida hasta ahora de pirámides, palacios y plataformas, muestran claramente el afán de los arquitectos mesoamericanos por perpetuar determinadas direcciones, de tal forma que según el caso, la aparición de algún objeto celeste en una fecha dada, era observada desde la estructura en cuestión. Así tenemos orientaciones solsticiales, como la Gran Pirámide de Cholula, y equinocciales como las pirámides C y D de Xochicalco y el vistoso juego de luz y sombra en el castillo de Chichén – Itzá; en donde Kukulcán, el Quetzalcóalt maya, desciende por la escalera principal con su cabeza de piedra y su cuerpo restante de luz solar. Existen pirámides alineadas hacia el punto del ocaso solar, o bien hacia el cenit del Sol, como en la pirámide de Tenayuca. Más aun se desarrollaron observatorios para registrar el momento justo del paso del Sol por el cenit. Un tubo cenital dentro de una cámara oscura, permite en Xochicalco y en Monte Albán observar este paso. El Templo Monolítico de Malinalco está orientado hacia el sur astronómico, esto es, en la dirección del Dios Huitzilopochtli. En la fiesta principal de él, en el día del solsticio de invierno, los rayos solares penetran por la puerta e iluminan su propia imagen en forma de águila. También en Xochicalco se tiene el observatorio cenital en una cueva natural acondicionada por medio de un orificio para registrar en la cámara oscura resultante, los días de paso cenital del Sol (Galindo, 1990, p. 38).

Como síntesis de todas sus observaciones astronómicas sobre el Sol, los pueblos de Mesoamérica nos legaron dos calendarios: el Xiuhpohualli (cuenta de años) de 365 días, organizados en 18 meses de 20 días cada uno y 5 días sueltos que se consideraban de mal presagio, y el Tonalpohualli o calendario religioso que constaba de 260 días repartidos en 13 meses de 20 días cada uno. El primero lo empleaban para llevar la cuenta de los años, las estaciones anuales y los ciclos agrícolas, el segundo era una especie de almanaque ritual en el que se consultaba el destino de todo recién nacido. Estos calendarios corrían simultáneamente a través de dos ruedas o engranajes, de tal forma que solo después de 52 años ambos coincidían en sus inicios, lo que constituía un ciclo muy importante para esta región, siendo motivos de grandes celebraciones religiosas y el encendido del nuevo fuego que se repartía en todos los pueblos. Ambos calendarios tenían como fecha de inicio el día 13 de agosto del año 3113 a. C., fecha que se consideraba por dichos pueblos como la génesis de toda la humanidad.

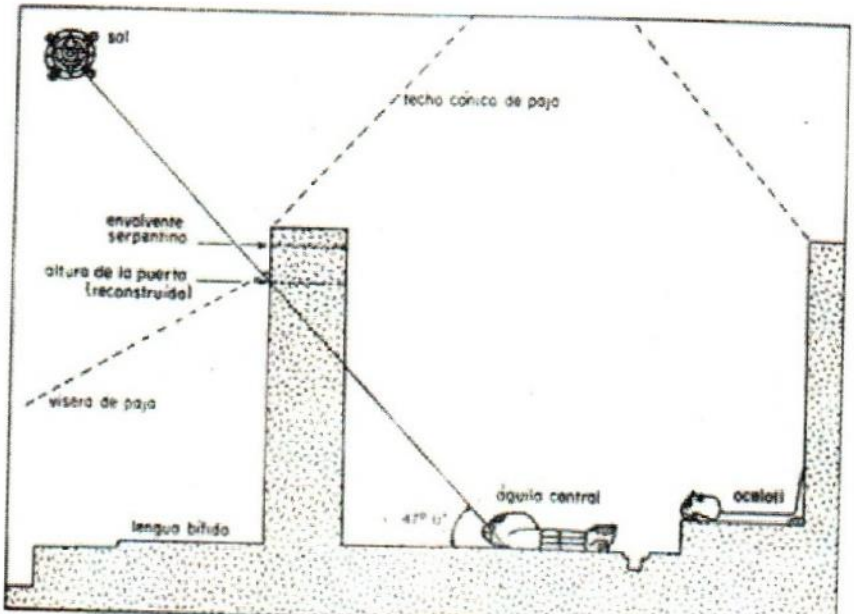


Figura 5. Evento solsticial en el Templo Monolítico de Malinalco. Huitzilopochtti en forma de rayo solar ilumina su propia imagen, el águila (cuauhtli). Fuente: (Galindo, 1990, p. 37)

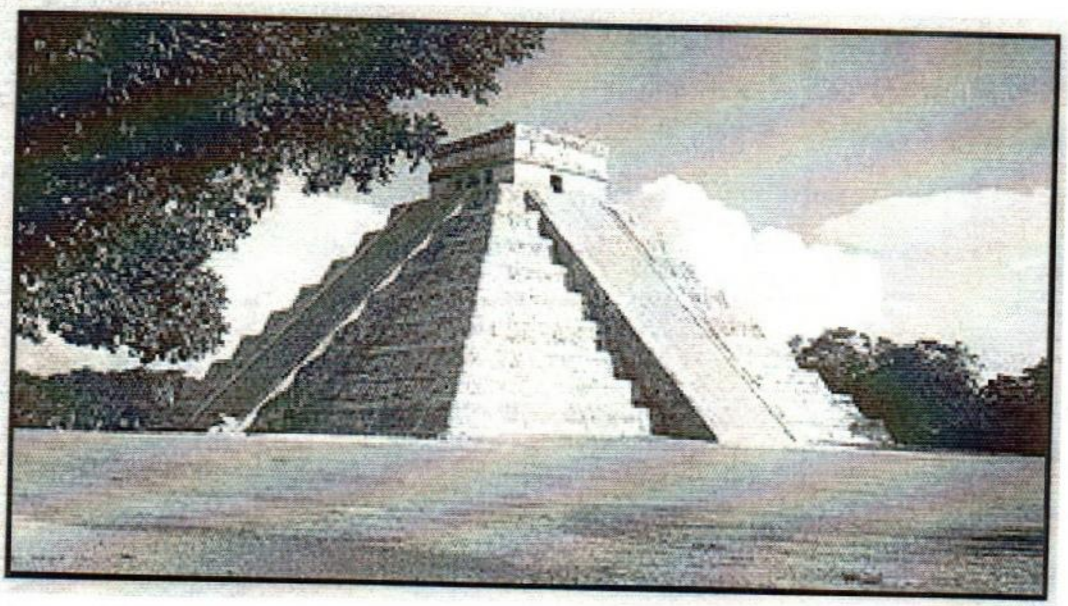


Imagen 20. Castillo de Chichén – Itzá, en el equinoccio Fuente: (Astrocosmos, 2002)

La alineación de los edificios por supuesto que no se limitó solamente a eventos solares, también se levantaron edificios a posiciones extremas de Venus y otros planetas, así como de estrellas brillantes y constelaciones ya que era una forma de rendirle tributo, dado que eran considerados una deidad.

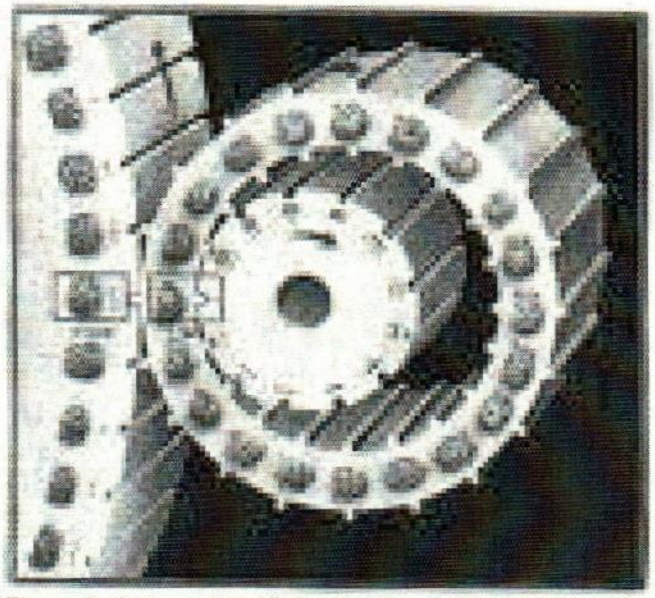


Figura 6. Calendarios Xiuhpohualli y Tonalpohualli en forma de engranes fuente: (Mozilla Firefox, 2009)

Eventos no frecuentes como la aparición de algún cometa o auroras boreales en general eran considerados como presagios nefastos como: hambre, guerras o muerte de algún noble como consecuencia de tal señal en el cielo. Por ejemplo en un documento colonial nahualt de Tlatelolco del año 1519 en el cual se menciona que en el año acatl vinieron los españoles y una estrella humeaba (citlalin popoca) o cometa, al verla los viejos lloraban mucho porque sabían que una desgracia muy grande llegaría a ellos.

Los eclipses solares y lunares también fueron estudiados por los mesoamericanos y eran considerados de malos presagios. Su periodicidad a veces no tan obvia, motivó a esos observadores a estudiar esta clase de fenómenos con más detalle. Testimonio de ello se encuentra en las páginas 51 a la 58 del códice maya de Dresden. Ahí se encuentra asentada una serie de fechas que corresponden a conjunciones eclípticas, abarcando un período de casi 33 años señalando 405 lunaciones organizadas en 69 grupos de 177, 178 y 148 días. Precisamente estos períodos sugirieron que se trataba de cuentas relacionadas con los eclipses, pues

177 días es el intervalo en promedio que separa a dos eclipses, sean de Sol o de Luna. Bajo ciertas circunstancias un eclipse de Sol también sucede después de otro de Sol una vez que transcurren 148 días. Además las fechas consignadas explícitamente corresponden en efecto a eclipses reales, aunque no todos observables desde la tierra maya (Galindo, 1992, p. 60).

1.3.7 Astronomía griega

La astronomía griega, también conocida como astronomía occidental, se divide en dos etapas: la astronomía griega antigua y la geocéntrica. La antigua se caracterizó por ser una astronomía descriptiva del cielo y su relación con las actividades sobre todo las del campo y la navegación, esta abarca del siglo VIII a.C. al IV a.C. y la geocéntrica se diferencia básicamente en que genera una cosmovisión filosófica de la astronomía, convirtiéndose en la visión dominante hasta el siglo XVII.

La astronomía en la antigua Grecia estaba totalmente relacionada con el registro del tiempo. Es natural que eventos astronómicos tales como el día conformen un periodo natural de éste. Las fases periódicas de la Luna marcaron la siguiente extensión - el mes -. De hecho, estos proporcionaron los métodos básicos de medición del tiempo hacia el 700 a.C.. El siguiente período de tiempo, el año, fue más difícil de determinarlo, sobre todo porque quisieron adaptarlo a los meses lunares, por ejemplo, si consideraban los meses de 30 o 29 días, la Luna se desfasaba muy rápido y los 12 meses se desfasaban rápidamente con respecto a las estaciones del año, por lo que en los dos siglos próximos se tuvieron propuestas como considerar 6 meses de 30 días y 6 de 29 días, con respecto a la Luna funcionaba bastante bien, pero con respecto al año se desfasaba aún más. Solón hizo una propuesta bianual considerando 13 meses de 30 días y 12 de 29 días, su desfase anual mejoró pero no lo suficiente, se tienen propuestas inclusive de ciclos de 59 años con 730 meses, los cuales funcionaban mejor. La dificultad anterior llevó a considerar las constelaciones como guía para las actividades del campo y la navegación, como ejemplo de ello tenemos una épica de la poesía Trabajos y días de Hesíodo.

... cuando las Pléyades nazcan es tiempo de usar la hoz, pero el arado cuando se estén poniendo, cuarenta días permanecen alejadas del cielo; cuando Arturo surja del mar y, elevándose al anochecer, permanezca visible la noche entera, las uvas deberán ser podadas; pero cuando Orión y Sirio lleguen a la mitad del cielo y Aurora la de rosados dedos vea a Arturo, las uvas deberán ser recogidas; cuando las Pléyades, escapando de Orión, se sumerjan en el oscuro mar, pueden esperarse tormentas; cincuenta días después de que el sol da vuelta es el momento oportuno para que el hombre navegue; cuando Orión aparece, el regalo de Deméter debe ser traído al suelo liso y bien trillado.(O'Connor, y Robertson, 1996).

Otros filósofos griegos como Pitágoras, alrededor del 500 a. C. hicieron algunas aportaciones a la astronomía como: postular que la Tierra era redonda y no un disco con centro en el Olimpo como se consideraba, que la órbita de la Luna estaba inclinada hacia el ecuador de la Tierra, descubrió que Venus era el mismo planeta que algunas temporadas se veía al atardecer y otras al amanecer. Sin embargo todo seguía siendo descriptivo.

Hacia el año 450 a.C., los griegos comenzaron un fructífero estudio de los movimientos de los cuerpos celestes y con ello iniciaron la creación de teorías que explicaran dichos movimientos. Filolao (siglo V a.C.), discípulo de Pitágoras, creía que la Tierra, el Sol, la Luna y los planetas giraban todos alrededor de un fuego central oculto por una 'contratierra' interpuesta. De acuerdo con su teoría, la revolución de la Tierra alrededor del fuego cada 24 horas explicaba los movimientos diarios del Sol y de las estrellas.

El más original de los antiguos observadores de los cielos fue el griego, Aristarco de Samos. Creía que los movimientos celestes se podían explicar mediante la hipótesis de que la Tierra gira sobre su eje una vez cada 24 horas y que junto con los demás planetas giran en torno al Sol, postulando de ésta manera la teoría heliocéntrica como explicación del movimiento aparente de los cielos.

La hipótesis de Aristarco fue rechazada por la mayoría de los filósofos griegos tanto contemporáneos como posteriores a él, éstos argumentaban que la Tierra era una esfera inmóvil alrededor de la cual giran los objetos celestes. Esta teoría, se conoce como sistema geocéntrico, por considerar a la Tierra como el centro del universo, los argumentos que sustentaban la teoría eran:

- Si la Tierra no fuera el centro del universo, entonces ¿porqué cualquier objeto que se lance hacia arriba, por más fuerte que se envíe vuelve a la Tierra?, vuelve, porque la Tierra es el centro del universo

- Si la Tierra rotase, entonces una piedra que se lanza hacia arriba debería de caer mucho más al occidente, puesto que en el tiempo que ella está en el aire la Tierra avanzaría hacia el oriente.

- Si la Tierra rotase, entonces los pájaros y las nubes deberíamos verlos pasar a gran velocidad hacia el occidente, lo cual no ocurre.

Además de los argumentos anteriores encontraron otro aún más poderoso, el paralaje de las estrellas fijas. Si la Tierra rotase y girara alrededor del Sol, entonces el paralaje de las estrellas fijas debería de cambiar de un día a otro o al menos en tiempos mayores, digamos medio año, lo cual no ocurre. Ante éste último argumento, la teoría heliocéntrica no tuvo más que esperarse cerca de 20 siglos para poder resurgir y desplazar la geocéntrica

Además se postuló que habían dos mundos diferentes, el sublunar el cual era imperfecto y en donde todo tendía al reposo de los cuerpos y el supralunar en donde todo era perfección e inmutabilidad, por lo que en dicho espacio todos los cuerpos celestes se movían con un movimiento circular uniforme, ya que era el único movimiento perfecto y perfecto es quien habita dichos lugares, es decir, todas las divinidades.

Bajo estos principios Eudoxo (408 - 355 a.C) fue el primero en concebir el universo como un conjunto de 27 esferas concéntricas que rodean la Tierra, la cual a su vez también era una esfera. Platón y uno de sus más adelantados alumnos

Aristóteles (384 - 322 a.C.) mantuvieron el sistema ideado por Eudoxo agregándole no menos de cincuenta y cinco esferas en cuyo centro se encontraba la Tierra inmóvil.

La teoría geocéntrica convencía no solo a filósofos, sino que coincidía con lo que la gente común y corriente veía en el cielo, sin embargo, había un problema que no podían explicar, - la retrogradación de los planetas y el aumento o disminución de sus brillo -, lo cual indicaba que la distancia que guardaban hacia la Tierra cambiaba, por ello, Platón planteo un problema conocido como el problema de Platón, que consistió en explicar dichos fenómenos considerando que dichos astros se mueven con movimiento circular uniforme.

Apolonio de Pérgamo, ideo la teoría de los epiciclos para explicar que dicho movimiento también sucedía en los planetas. Para esto él supuso que los planetas se movían al mismo tiempo en dos círculos perfectos: uno grande llamado deferente con centro en la Tierra y otro pequeño llamado epiciclo cuyo centro coincidía con la circunferencia mayor de manera permanente y desplazándose continuamente alrededor de la Tierra.

Ptolomeo compiló el saber astronómico de su época en los trece tomos del «Almagesto». En el siglo II d.C. expuso un sistema en donde la Tierra, en el centro, estaba rodeada por esferas de cristal de los otros 6 astros conocidos. La Tierra no ocupaba exactamente el centro de las esferas y los planetas tenían un epiciclo el cual había sido perfeccionado por Hiparco, cuyo eje era la línea de la órbita que giraba alrededor de la Tierra llamada deferente.

Como el planeta gira alrededor de su epiciclo se aproxima y se aleja de la Tierra mostrando a veces un movimiento retrogrado. Este sistema permitía realizar predicciones de los movimientos planetarios, aunque tenía una precisión muy pobre. A pesar de esto fue popularizado y aceptado más que como modelo verdadero como una ficción matemática útil. Se calcula que el universo ptolemaico solo media 80 millones de kilómetros.

Con la explicación lograda por Ptolomeo en el Almagesto, la teoría geocéntrica quedó totalmente consolidada. Posteriormente cuando la iglesia católica se convirtió en la religión dominante se dieron cuenta que había una gran concordancia con la Biblia y fue aceptada como explicación del movimiento del universo, situación que lo llevó a prevalecer hasta el siglo XVII.

1.4 Problema de investigación y objetivos

En Matemática Educativa y en particular en Socioepistemología, una investigación parte de reconocer un fenómeno didáctico relacionado con un determinado saber matemático y su uso al seno del aula de matemáticas (Buendía y Cordero, 2005). Partiendo de dicho principio se ha detectado en la Facultad de Agronomía, Campus V, de la UNACH, que a partir de la reforma curricular de mayo del 2006, en el área de matemáticas se establecieron como propósitos vincular los contenidos teóricos de Matemáticas I y Matemáticas II a problemas reales de Agronomía, teniendo como centro experimental para realizar las prácticas respectivas el Rancho San Ramón ubicado en Villa Flores, Chiapas, propiedad de dicha institución o bien la propia Facultad, sin embargo, la literatura que los programas de estudio sugieren y que ya se analizó en el subcapítulo 1.1, no fueron diseñadas para aplicarse a dicho campo y de los profesores que imparten las materias solo uno es agrónomo y su vida profesional lo ha dedicado a la enseñanza de las matemáticas. Lo anterior constituye un problema didáctico tanto para los alumnos como para los profesores, por lo que es necesario realizar la transposición didáctica de los saberes matemáticos contenidos en los programas de estudio de las asignaturas mencionadas hacia el campo de la formación en Agronomía, ya que dichos saberes se generaron en la comunidad científica de matemáticos y deben llevarse al campo agronómico, en donde se emplearán como una herramienta para el ejercicio de la profesión.

Para abordar esta problemática, el presente trabajo parte de un fenómeno conocido por los campesinos y los agrónomos como efectos de luna y que los lleva a realizar ciertas labores de cultivo de acuerdo a las creencias que ellos tienen o teorías que hayan creado sobre la influencia lunar en las plantas, uno de los objetivos será precisamente entender a profundidad la predicción de las diferentes atracciones gravitacionales que la Luna y el Sol ejercen conjuntamente sobre la Tierra y a partir de allí poder sentar las bases teóricas y empíricas que permitan a otros investigadores evaluar su influencia sobre los seres vivos que habitan nuestro planeta y de esa manera analizar si las creencias populares y teorías agronómicas sobre los efectos de luna coinciden con la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre la Tierra. Así también se pretende que la presente investigación permita detectar aquellos contenidos matemáticos que están incluidos en los programas de estudio de las materias mencionadas y que pueden abordarse al estudiar los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol. Con la finalidad de que la atracción gravitacional de los astros referidos pueda ser modelada por cualquier estudiante o profesor de agronomía o cualquier persona que tenga conocimientos básicos de trigonometría, se intentará diseñar una secuencia didáctica que lo guie hasta obtener el modelo deseado.

Dos son las preguntas que guiaron la presente investigación: ¿qué contenidos teóricos de Matemáticas I y Matemáticas II de la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V de la UNACH se pueden transponer al campo agronómico al explicar el efecto de atracción gravitatoria de la Luna y el Sol?, y ¿es posible transponer los conocimientos astronómicos, matemáticos y de las mareas oceánicas respecto a la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol hacia la formación de Ingenieros Agrónomos para explicar el llamado efecto de luna?

Capítulo II

Marco teórico y metodológico

Cualquier investigación científica, independientemente de su naturaleza, debe apoyarse en ciertos marcos teóricos o conceptuales relacionados con las preguntas de investigación que le permitan, en cierto modo, definir su campo de acción, metodología a utilizar y servirle de tamiz para la interpretación de los resultados obtenidos. La presente investigación no escapa de ello y en el presente capítulo se exponen los referentes teóricos que la guían y le dan coherencia en su desarrollo.

2.1. La transposición didáctica

La palabra *transponer,* del latín *transponére*, significa poner una cosa más allá, en un sitio distinto del lugar que ocupaba. El término *transposición didáctica* se refiere, en general, al proceso mediante el cual tiene lugar la acción de *transponer* un saber hacia un sitio didáctico. Digámoslo así: llevar el saber al ámbito escolar (Cantoral & Farfán, 2004, p. 2).

De acuerdo con esta noción de transposición didáctica, el problema que se tiene es de comunicación, ya que un conocimiento matemático lo podemos considerar como una abstracción de la realidad o sea una manera de pensamiento que se genera en la comunidad científica y que debe ser llevada al salón de clases, precisamente la teoría de transposición didáctica lo que estudia es el conjunto de procesos o transformaciones de adaptación que sufre el saber sabio para convertirse en saber enseñado, Chevallard define dichos procesos de la siguiente manera:

"La transformación de un contenido de saber preciso en una versión didáctica de este objeto de saber puede denominarse más apropiadamente "transposición didáctica *stricto sensu*". Pero el estudio *científico* del proceso de transposición didáctica (que es una dimensión fundamental de la *didáctica de las matemáticas*) supone tener en cuenta la transposición didáctica *sensu lato*, representada por el esquema:

→ Objeto de saber → Objeto a enseñar → Objeto de enseñanza en el que el primer eslabón marca el paso de lo implícito a lo explícito, de la práctica a la teoría, de lo preconstruido a lo construido" (Chevallard, 1991, citado por Bravo, 2007, p. 18).

De acuerdo con el esquema anterior, la transposición didáctica en su sentido más amplio, inicia en el primer eslabón, es decir, en la propia comunidad matemática, ya que el científico al comunicar sus resultados suprime todas las reflexiones que no le fueron útiles, los desaciertos, las confusiones, las discusiones con otros científicos, etc. Además, al comunicar sus hallazgos tiene que cumplir con ciertas exigencias que la misma comunidad le impone, por lo que el conocimiento se despersonaliza, es decir, se extrae de su espacio y su tiempo.

Una vez que el conocimiento se encuentra disponible como saber sabio, se continúa con la transposición didáctica para pasar a ser un objeto a enseñar, esta transposición ocurre en lo que Chevallard denomina la "noosfera", que es el lugar en donde se "piensa el funcionamiento didáctico" (Cantoral & Farfán, 2004). Este lugar puede estar compuesto por padres de familia suficientemente cultivados, dirigentes de las instituciones escolares, representantes políticos de educación, especialistas de la disciplina, etc. En el nivel superior, en México, al ser las universidades autónomas, normalmente la noosfera se reduce a un grupo de académicos que trabajan en el área. Es en este eslabón en donde se definen los objetos a enseñar, es decir, los contenidos programáticos de las materias que se impartirán. En el caso de la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH, los objetos a enseñar en los dos cursos que se programaron lo definieron los profesores que en su momento estaban a cargo de impartir dichas asignaturas.

Continuando la ruta esquemática de Chevallard, se puede observar que un conocimiento matemático, cuando se introduce en un programa de estudio, experimenta transformaciones en el proceso de su tratamiento didáctico, proceso que hace que el saber a enseñar sea diferente del saber enseñado. Esta diferencia es central ya que se origina por la actividad didáctica del maestro. Un conocimiento matemático específico, identificado y validado como un conocimiento a enseñar por la noosfera, sufre transformaciones producto de la influencia del triángulo didáctico de Chevallard, ya que se verá afectada por las perspectivas del docente, la cosmovisión de éste respecto a la enseñanza y al saber que desea enseñar.

Por lo expuesto hasta aquí se puede decir que la transposición didáctica tiene tres etapas que se corresponden con los tres eslabones del esquema de Chevallard: la primera sería la que ocurre en la propia comunidad científica, la segunda corresponde a la selección que realiza la noosfera para incluir ciertos saberes en los programas de estudio de la currícula de las instituciones educativas y la tercera etapa la que se da en el aula por parte del profesor, el cual incluye el análisis del proceso de transposición de la actividad didáctica de éste, como se observará en el siguiente apartado.

2.2. El sistema didáctico

Partiendo de que un sistema es un conjunto de partes o elementos organizados y relacionados que interactúan entre sí para lograr un objetivo (diccionario informático, 2007). Se entiende que un sistema no es la suma de sus partes o elementos que lo contienen, por ejemplo, una persona no es la suma de sus piernas, brazos, cabeza, etc, ni siquiera la suma de los subsistemas de los que está formado: circulatorio, endócrino, respiratorio, digestivo, etc. Sino que un sistema puede contener subsistemas pero relacionados y que están en constante interacción, en el ejemplo expresado, el sistema respiratorio está íntimamente relacionado con el circulatorio, el digestivo y todos los demás y si uno falla, todo el sistema se verá afectado.

En el caso del sistema didáctico es igual, éste no solo se compone del profesor y sus estudiantes, sino que actúan como un sistema desde la comunidad científica que genera el saber, la sociedad en la que se encuentre insertado la institución educativa, la noosfera, los directivos, el saber a enseñar, el maestro y los estudiantes, todo de manera interrelacionada e interactuando constantemente, ésta es la noción de sistema didáctico que estará presente cuando se hace referencia a dicho término.

La figura 7, precisamente muestra de manera esquemática la noción que se ha planteado en los párrafos anteriores, respecto a cómo se entiende en la presente investigación el sistema didáctico.

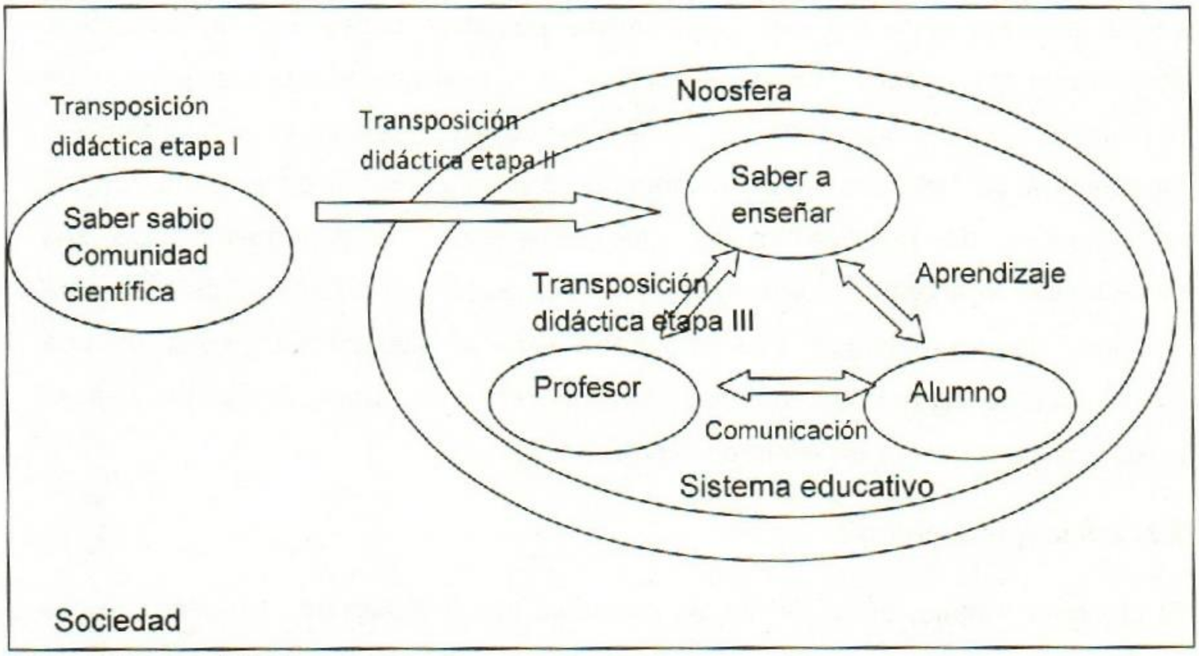


Figura 7. Sistema didáctico

Como puede verse en la figura 5, el sistema didáctico no debe ser reducido a la relación bilateral entre profesor y alumno, sino abordado a través de un enfoque sistémico, en este sentido el sistema mínimo está compuesto por el triángulo didáctico de Chevallard, sin embargo, dicho triángulo a su vez se inserta en otro sistema más amplio (sistema educativo), el cual a su vez pertenece a una sociedad que se relaciona con comunidades que persiguen fines distintos.

En la Facultad de Agronomía, Campus V, de la UNACH los saberes fueron seleccionados por quienes constituyeron la noosfera al momento de la reestructuración de los planes y programas de estudio, y aunque los conocimientos seleccionados fueron creados en la comunidad científica, ellos lo transponen al campo de la formación de agrónomos, bajo el supuesto de que son esos conocimientos matemáticos que los estudiantes de esta área necesitarán para el ejercicio de la profesión. Al estar plasmados los contenidos matemáticos en los programas de estudio, los profesores que impartirán las materias lo deberán nuevamente transponer para comunicarlo a los estudiantes, en este paso, la transposición didáctica en su última etapa es muy intensa y se ve influenciada por varios factores, entre los más significativos podemos considerar los siguientes: perspectiva del maestro, formación profesional y académica, visión que tenga de la educación y de la enseñanza de la matemática, etc. Además el alumno también interactuará con el saber, con el maestro, con su familia y en general con las comunidades de prácticas a las que pertenece y dependiendo de sus expectativas lo aceptará con mayor o menor interés y lo tratará de asimilar para los fines que él persigue. Por otra parte todo el sistema se inserta en una comunidad de agrónomos quienes los conocimientos matemáticos los utilizan como una herramienta en el ejercicio profesional

2.3. Socioepistemología

El presente trabajo, parte de ciertas premisas que lo guían en su desarrollo, las cuales están acordes con las que toman el grupo de investigadores del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

- En la Educación Superior la matemática escolar está al servicio de otras disciplinas científicas y de otras prácticas de referencia en donde adquiere sentido y significación (Cantoral y Farfán, 2003).
- En la enseñanza del álgebra, la geometría, trigonometría y cálculo en la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH, debe estar orientada como una herramienta al servicio de la agronomía, no hacia expertos de la matemática.
- La estructura general del actual discurso matemático teórico suele ser la base menos propicia para la comunicación de las ideas matemáticas (Muñoz, 2006).

Estas premisas guían la presente investigación y necesariamente conducen al rediseño del discurso matemático escolar.

¿Porqué emplear como marco teórico a la Socioepistemología?.

Empleamos en la presente investigación a la Socioepistemología porque ésta es una perspectiva de investigación que considera como necesidad básica el dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 1998 p. 3).

Precisamente, es en ese enfoque en que nuestra investigación encuentra rumbo, puesto que no partimos de un fenómeno didáctico que ocurra entre la relación maestro – alumno, sino desde el conocimiento a enseñar seleccionado por la noosfera. Los saberes algebraicos, geométricos, trigonométricos y de cálculo seleccionados de ninguna manera fueron inventados para enseñarse a profesionistas del área de agronomía, sin embargo, en los programas de estudio se plantea aplicarlos a dicha área del conocimiento, sin que la literatura sugerida se haya creado con dicho fin.

Lo anterior se debe a que existe la creencia que los problemas didácticos que se tienen en las instituciones educativas, se resuelven con realizar reformas en los planes y programas de estudio, por lo cual, las reformas curriculares son relativamente comunes en las escuelas superiores, por lo que cabe la siguiente interrogante, ¿se resuelven los problemas didácticos con dichas reformas? Al respecto Cantoral y Farfán (2004), aseguran que dicho esfuerzo renovador no conduce a más que a un eterno desplazamiento de las dificultades de aprendizaje, sin que jamás se alcance un progreso, ya que en cada nueva reforma se produce un nuevo marco epistemológico, por lo cual las antiguas dificultades simplemente se suplen por otras no consideradas previamente.

La Socioepistemología nos permitirá no solamente realizar un análisis epistemológico e histórico de los efectos de luna sobre la tierra, sino que en el aspecto sociocultural nos permite incorporar y analizar las creencias que las personas del agro tienen respecto al efecto lunar y así poder interactuar con la agronomía y reorientar el discurso matemático escolar para los estudiantes de dicha área de la institución en la que hemos orientado nuestra investigación.

Estamos convencidos que la socioepistemología nos permitirá al menos dejar planteados las líneas de investigación que deberán continuarse en otras investigaciones para ir robusteciendo la enseñanza de la matemática en la Agronomía, la cual se encuentra hasta el momento bastante limitada.

2.4. Metodología

La presente investigación, como se mencionó en el capítulo anterior, tiene como problemática principal, propiciar la transposición didáctica de algunos conocimientos matemáticos que se contemplan en los programas de estudio de Matemáticas I y Matemáticas II (de la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH), al campo agronómico y así dar evidencia de la factibilidad de transponer dichos contenidos temáticos a las instituciones escolares de agronomía. Para poder cumplir con lo planteado, se tomó como eje principal de esta investigación el fenómeno conocido en el medio rural como *efecto de luna*, debido a que es un fenómeno que permite relacionar la agronomía con la astronomía y la matemática, y a partir de él, transponer conocimientos matemáticos, para la formación de Ingenieros Agrónomos fundamentados en los conocimientos astronómicos.

Para poder transponer algunos contenidos teóricos de Matemáticas I y Matemáticas II de la institución mencionada, a través del efecto de luna, esta investigación se sustenta en tres columnas vertebrales básicas:

1) La agronómica, en donde se escudriña desde la época prehispánica las creencias que los aborígenes de aquella época tenían sobre el efecto de luna en sus plantas cultivables en Mesoamérica, así como las corrientes agronómicas actuales que han propuesto teorías que tratan de explicar dicho efecto en los vegetales y sus recomendaciones agronómicas

respectivas, para finalizar esta ruta de investigación se realiza un trabajo de campo con productores agropecuarios del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas, México, a quienes se les entrevista y graban sus comentarios respecto a sus creencias sobre dicho fenómeno.

2) La astronómica, en esta columna vertebral se documentan las evidencias arqueoastronómicas que muestran la relación de la astronomía con sus construcciones y sus calendarios y éstos últimos utilizados para predecir las actividades agrícolas desde la época antigua en varias culturas y principalmente en la mesoamericana. Se documenta también la dinámica de los movimientos astronómicos de la Tierra, de la Luna y el Sol, los cuales provocan las mareas oceánicas, cuya variación periódica depende del dinamismo de los tres cuerpos celestes mencionados, se destaca su historia y su epistemología de dicho fenómeno.
3) En la tercera columna vertebral se realiza un análisis de la matematización de la astronomía desde la época griega, destacando los esfuerzos intelectuales que estos grandes pensadores realizaron para darle dimensiones a la Tierra, la Luna y en si al universo, conocimientos que fueron fundamentales para el desarrollo de la astronomía. Se destacan las aportaciones de personajes como Copérnico, Brahe, Kepler y Galileo realizaron a la astronomía y la matematización de ella, que permitieron finalmente a Newton la creación de la teoría de la gravitación universal, con la cual dio una explicación científica al movimiento planetario y lunar, y como una aplicación de su teoría explicó las mareas oceánicas de forma científica, teoría que ha servido de base para modelar matemáticamente dicho fenómeno. En esta columna vertebral se expone a detalle el modelo matemático ortodoxo sobre las mareas oceánicas, el cual es el fundamento para obtener el modelo de atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre las plantas en la superficie sólida de la tierra a través de la función coseno.

El análisis de las tres columnas vertebrales de esta investigación, permite establecer relaciones entre las creencias de los campesinos sobre el efecto lunar y las actividades agrícolas que realizan de acuerdo a ellas, así como con las teorías del flujo de la savia de las plantas que investigadores de agronomía han realizado de dicho fenómeno y sus recomendaciones respectivas, ambas concepciones pueden analizarse a través de la teoría de las mareas oceánicas en donde el efecto gravitatorio de la Luna y el Sol pueden comprobarse y predecirse. Lo anterios se toma de base para el modelo matemático de la atracción gravitacional de la Luna y el Sol, el cual debe servir de fundamento para investigar la relación que dicho efecto tiene en las plantas.

Para tener una referencia de cómo se ha estado intentando aplicar los nuevos contenidos de las materias de Matemáticas I y Matemáticas II al campo de la agronomía desde la reforma curricular de agosto del 2006 a la fecha y su puesta en práctica en el Rancho San Ramón como lo especifican los programas respectivos, se entrevistaron a estudiantes que cursaron dichas materias videograbando sus respuestas dadas a las preguntas formuladas. Se revisaron libretas de notas de algunos estudiantes y se escanearon algunas hojas que se consideraron representativas. Además se entrevistaron a los profesores que en la actualidad están al frente de esas asignaturas, filmando las entrevistas respectivas.

Para propiciar la transposición didáctica, en su etapa del sistema didáctico, se diseñará una secuencia didáctica que permitirá tanto a alumnos como a profesores de matemáticas de la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH, construir un modelo muy aproximado del comportamiento de la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol y servirle de base para sus experimentos prácticos en el Rancho San Ramón como lo especifican sus programas de estudio.

Finalmente se especifican algunos temas que se encuentran en los programas de estudio de las materias de Matemáticas I y II y que se pueden abordar a través del efecto de atracción gravitacional lunisolar sobre las plantas.

Capítulo III

Análisis histórico – epistemológico y sociocultural de los efectos lunares en la agricultura y en las mareas oceánicas.

El presente capítulo aborda tres temas principales: en primer lugar un análisis histórico – epistemológico y sociocultural de los efectos de luna en la agricultura en donde se reporta una síntesis de las entrevistas realizadas a campesinos del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas, sobre sus creencias respecto a los efectos de luna y las actividades agrícolas que llevan a cabo acordes a ella, se hace además una breve historia de las creencias que se tenían en la época prehispánica sobre sus efectos en los cultivos, hasta las teorías actuales que algunos agrónomos han realizado al respecto y las labores de cultivo que sugieren se realicen acordes con nuestro satélite; en segundo lugar un análisis histórico – epistemológico de las mareas oceánicas en donde se realiza una epistemología de las mareas desde la época antigua hasta la teoría newtoniana de éstas; finalmente en tercer lugar se realiza un análisis de las similitudes y diferencias entre las creencias de las personas del medio rural, las teorías agronómicas y las mareas, respecto a los efectos lunares.

3.1 Análisis histórico – epistemológico y sociocultural de los efectos lunares en la agricultura.

3.1.1 Los efectos lunares en la agricultura, breve historia.

Seguramente cuando el hombre descubrió la agricultura y la ganadería, ya contaba con ciertos conocimientos sobre las fases lunares y los ciclos de la Luna, los cuales los había empleado en su vida nómada, por ejemplo, ya sabía que las migraciones de ciertos animales correspondían con ciertas fases lunares y los cazadores aprovechaban dichos fenómenos para capturar sus presas, que las subidas y bajadas de las mareas permitía capturar con mayor facilidad algunos productos del mar, que la maduración de frutos que consumía se daba en ciertas épocas y en ciertas regiones bien definidas, los cuales logró predecir gracias a sus calendarios primitivos basados en los ciclos lunares y solares.

Una vez que el hombre se hace sedentario, la actividad principal a la que se dedica es la agricultura y lógicamente necesita contar con conocimientos muy elementales sobre dicha actividad, como por ejemplo: época de siembra, de cosecha, de poda si el cultivo lo requería, deshije, etc. Ahí se encuentra el germen de la relación que empezó a darse entre las fases lunares y las actividades agrícolas que realizaban.

De manera general, todas las civilizaciones primitivas lograron crear sus calendarios lunares y solares en base a las observaciones de las fases de la Luna y de los desplazamientos aparentes que el Sol presenta. Los ciclos lunares dieron origen a las actuales semanas y los meses, en tanto que los desplazamientos aparentes del Sol hacia el norte y hacia el sur originaron los años. Lógicamente cabe preguntarnos, ¿Qué fue lo que motivó al hombre crear calendarios? si bien es posible encontrar varios calendarios como el mesoamericano, el gregoriano, el chino, etc, todos se pueden rastrear sus orígenes y tienen en común haber surgido de la observación de los movimientos aparentes del Sol y de la Luna, y también tienen en común responder a las necesidades de predecir el inicio y culminación de la época de las lluvias, ya que eran civilizaciones que tenían como principal actividad la agricultura y por lo tanto habían necesidades sociales que responder como: épocas de siembra de sus cultivos para garantizar buenas cosechas, épocas de cosechar para mayor aprovechamiento y duración del producto, sequías y la necesidad de almacenar alimentos, etc. Por lo tanto se puede decir que el objetivo principal de los calendarios era predecir las actividades que los pueblos deberían realizar para garantizar sus existencias o al menos la subsistencia.

Un ejemplo de lo expresado en el párrafo anterior lo tenemos en las civilizaciones mesoamericanas, en donde la clase sacerdotal era quien conocía y manejaba el calendario y los que indicaban al pueblo cuando deberían sembrar sus cultivos, cuando realizar las labores agrícolas y la cosecha, lo cual los condujo a crear el calendario más exacto de sus época.

La relación entre las actividades agrícolas y las fases lunares se han dado desde los inicios de las civilizaciones, una forma de comprobarlo es a través de las creencias de los campesinos respecto a dicho fenómeno, los cuales se han trasmitido de generación en generación a través de los siglos y es fácil encontrar autores prácticamente en todas partes del mundo que reportan dichas creencias, sin embargo, en este trabajo solo a manera de ejemplo se reportan algunos que se deducen de los códices mesoamericanos.

En la civilización azteca había una fuerte asociación entre los dioses del pulque y la Luna, la figura 8 muestra a Toltécatl uno de los dioses del pulque adornado con yecametztli (nariguera en forma de media luna). Dicho adorno se relaciona con el signo jeroglífico en forma de Luna creciente. En su escudo se aprecia otro símbolo de luna creciente y enfrente el símbolo del maguey, por lo que es fácil establecer que en la cultura azteca había una fuerte asociación entre dioses, Luna creciente y maguey o pulque, al respecto después de la figura 8, se tiene la siguiente cita:

Figura 8. Toltécatl, uno de los dioses del pulque (Códice Magliabecchiano, 52)
Fuente: Stanislaw I 1986 p. 116

"La mente mágica de los indígenas mexicanos debió asombrarse al comprobar que cada maguey se convertía en la fuente maravillosa de donde surgió el líquido, cuya mayor o menor afluencia dependía de las fases de la Luna; después, la transformación del líquido dulce en licor embriagante, transformación que implicaba un ciclo y cuyas etapas también estaban asociadas a las fases lunares. Todavía en la actualidad el *maguey es castrado cuando la Luna está en creciente,* nunca en menguante, y *el aumento o disminución de la afluencia del líquido puede ser notado perfectamente según las fases de la Luna"* (Gonçalves, 1965, p. 142)

Los aztecas creían que el buen horticultor debería respetar los signos del año, del mes y del día durante su trabajo, en la figura 9, se puede observar como un horticultor se encuentra leyendo un libro con la Luna en creciente y el símbolo de las plantas de hortalizas, lo que significa que el buen horticultor debe estar instruido y respetar las fases lunares es sus labores con las hortalizas para obtener buenas cosechas. En la imagen se ve una Luna creciente, de donde se sabe que la siembra debe realizarse en dicha fase lunar.

Figura 9. El buen horticultor (Códice Florentino, lámina LXIX, figura 73)
Fuente: Stanislaw, 1986 p. 119

En toda Mesoamérica, la Luna tenía una gran influencia, no solo en las actividades agrícolas, sino era considerada una deidad, en la cultura azteca se llamaba Cuatlicue, en la maya Ixchel, y se relacionaba con las mareas, las lluvias y con las mujeres, las cuales se identificaban con ella y se encomendaban con ésta en sus embarazos y en sus partos. En casi todas las culturas del mundo como la griega, romana, egipcia, babilónica, china, etc, la Luna es considerada una deidad y en la mayoría identificada con el género femenino y relacionada con las lluvias y las plantas tanto agrícolas como maderables.

3.1.2 Los campesinos y sus creencias en los efectos lunares.

En este subcapítulo, se presenta una síntesis de las entrevistas realizadas a campesinos del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas. La entrevista constó de varias preguntas, éstas se encuentran en el anexo D. La primera parte de este apartado, contiene una síntesis de las respuestas dadas por quienes creen que la Luna influye sobre sus cultivos, y la parte dos por quienes consideran que la Luna no tiene ninguna influencia. Además se adjunta un DVD que contiene las entrevistas consideradas más representativas.

Los campesinos que creen en la influencia de la Luna.

En cuanto a cultivos, es la siembra donde consideran que debe tenerse más cuidado y realizarse una vez que la Luna tiene unos 7 días después del novilunio, es decir, a partir del Cuarto Creciente, hasta unos tres días antes del novilunio (período que los campesinos llaman - luna maciza-), esto hará que los granos se conserven en mejor estado por más tiempo, de realizar la siembra en luna tierna (tres días antes de la Luna Nueva y los primeros días de ésta) los granos se picarán con mayor rapidez y la mazorca en el caso del maíz no llenará adecuadamente. En el caso de cultivos como camote, yuca y calabaza aseguran que producirán mayor cantidad de frutos si se siembran en luna maciza, no crecerán tanto, pero si darán buenos frutos. La cosecha de preferencia debe realizarse en luna maciza, aunque repercute menos que la siembra, sobre todo porque ya el grano está formado o en caso de otros cultivos el producto ya ha madurado.

En los árboles cortados para usarse como madera en la construcción de casas (morillos, horcones, vigas, etc), deben derribarse en luna maciza, esto les dará mayor durabilidad y no se apolillaran rápido, claro también depende de la especie del árbol maderable. Para madera que ha de aserrarse y sobre todo la que se usará para la fabricación de muebles, los que tienen experiencia en ello, han observado que se agrieta un poco más cuando el árbol es derribado en luna maciza, en cambio el que se tala en luna tierna no se agrietará tanto y si es de buena madera tendrá buen tiempo de duración. En el caso de la madera que se usará para postes, si estos se van almacenar cierto tiempo debe cortarse en luna maciza, pero si por las necesidades ganaderas se requieren de inmediato, no se toma en cuenta a la Luna, aunque si tienen mayor durabilidad los que se cortan en luna maciza.

Uno de los aspectos que los campesinos han observado y que se hace interesante, es el hecho de que al cortar una rama o un árbol vivo en luna tierna le brota mayor cantidad de savia (agua como ellos le llaman) que uno cortado en luna maciza, situación que se puede aprovechar para investigar y probar si existe una relación entre la cantidad de fluido en las plantas y la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol.

Otra de las creencias que las gentes del campo tienen está relacionada con las lluvias, afirman que en cada una de sus fases normalmente llueve más que en las interfaces y cuando es cambio de Luna observan la posición que ésta tiene en sus primeros días, si viene canteada indica que ese mes lunar abundarán las precipitaciones, pero de no estar así, indicará que dicho mes sinódico será de pocas lluvias, desde luego, esta relación lo observan en época de temporal o próxima a él.

En cuanto a la influencia lunar en la ganadería, lo productores agropecuarios consideran que la principal influencia ocurre en los partos, según sus experiencias, estos ocurren con mayor frecuencia en cada una de las fases lunares y las crías nacidas en luna maciza son más fuertes y empiezan a caminar en un tiempo más corto que los nacidos en luna tierna, además que los nacidos en éste último caso, son más propensos a enfermarse, sobre todo en las primeras etapas de sus vida.

Todos los campesinos que creen en la influencia de la Luna lo han heredado de sus antepasados, quienes trasmitían sus conocimientos a través de la enseñanza en la vida diaria, por ejemplo don Humberto Alegría nos dice muy claro en la entrevista que su padre le enseñó diciéndole y haciendo la siembra en luna maciza, es decir, enseñaban con el ejemplo y platicándoles porqué lo hacían de esa manera.

Los campesinos que no creen en la influencia de la Luna

Generalmente, los campesinos que no creen en la influencia de la Luna en sus cultivos, son personas más jóvenes, como Eduardo Camacho, por ejemplo, él tiene 40 años de edad. Siembra cuando las lluvias ya están establecidas, sin fijarse en la Luna, igual sucede para el corte de madera. Sin embargo, la influencia lunar sobre las lluvias está más arraigada, aún en este tipo de campesinos, ya que en ella si creen un poco y como él mismo dice, son "los viejitos los que saben más de eso". Acepta que las personas de mayor edad las más de las veces aciertan en sus predicciones de que una determinada luna traerá más agua y otras no, de acuerdo con sus conocimientos ancestrales que él desconoce. Para Eduardo, es la canícula la que más influye en que llueva o deje de llover.

Por otra parte, es curioso que personas como Eduardo que al principio de la entrevista afirmó no creer en la influencia lunar sobre sus cultivos, acepta que en el ganado si influye, sobre todo relacionando el momento del parto tanto de vacas como de marranas con cualquiera de las cuatro fases lunares.

Se puede afirmar, que los campesinos más jóvenes del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas, son una mezcla de dos culturas respecto al efecto lunar, puesto que no creen en la influencia de la Luna en algunas actividades como las agrícolas, medio creen en la relación de la Luna con las lluvias y creen en otras como la relación entre el parto de sus ganados con las fases lunares.

De acuerdo con el párrafo anterior, cabe la siguiente pregunta. ¿A qué se debe que los campesinos de las nuevas generaciones estén abandonando las creencias de sus ancestros?. La respuesta o al menos parte de ella nos lo dio en la entrevista el Sr. Víctor Manuel Romero, quien nos menciona que los ingenieros agrónomos ya no creen en la Luna, ellos les dicen "usted siembre el día que sea,

... ¡porqué va estar escogiendo luna!" por eso las nuevas generaciones ya no creen ni se fijan en la Luna para sembrar sus cultivos.

Lo anterior nos permite entender porqué en las nuevas generaciones se da esa mezcla entre dos culturas. Por un lado creen en quienes les dan asistencia técnica, pero por otra parte no pueden dejar de creer en lo que sus familiares sobre todos los mayores siguen creyendo, comentando y llevándolo a cabo en sus actividades que realizan.

3.1.3. El influjo lunar en la agricultura actual

En la actualidad coexisten dos corrientes de pensamiento, unos que creen que nuestro satélite natural tiene una influencia sobre las plantas y los animales incluidos en éstos últimos a los humanos y otros que lo niegan totalmente, los primeros al aceptar una influencia lunar han creado teorías (explicaciones) sobre la influencia de dicho astro y realizan recomendaciones para obtener provecho de ellas, y los segundos en base a experiencias o estudios que han realizado lo niegan totalmente. A continuación se exponen brevemente las razones que ambas presentan para el caso de la influencia lunar sobre los vegetales

Los que niegan la influencia lunar en las plantas

El francés Enrique Aymie, quien es secretario del sindicato agrícola de Lagnes es incrédulo en el influjo de la Luna sobre la fisiología vegetal, no porque desconozca como debería ser el influjo lunar, sino porque durante 25 años de prácticas agrícola no pudo descubrir ningún hecho favorable a esta creencia, por el contrario, muchos en contra, a continuación se exponen algunos de ellos.

Aymie, explica que en Francia, los campesinos tienen muy arraigada la creencia de que los árboles nunca deben podarse en Luna vieja (fase de cuarto menguante en adelante) y mucho menos el último miércoles de la Luna, de hacerlo en dicho día el árbol podado morirá. En cierta ocasión un agricultor comenzó a podar seis moreras sin darse cuenta ni el día de la semana ni en la Luna; pero cuando ya había podado tres, se percató de que era el último miércoles de la Luna. Al instante interrumpió el trabajo, seguro de que había matado a las tres moreras. En la próxima Luna Nueva podó las tres moreras restantes; y sorpresa aquel año y los siguientes no pudo apreciar la más pequeña diferencia entre las moreras que, según la creencia popular, debían morir y las que, conforme a la misma creencia, debían haberse desarrollado con inusitado vigor (Puig, 2003)

El mismo Aymie. Se hallaba en cierta ocasión ocupado en la siembra de patatas, cuando un vecino le dijo: —"¿Quiere usted cosechar granos de rosario?" —"¿Por qué dice usted eso?" —replicó Aymie. —"La Luna no le va a ayudar en este trabajo: cosechará, sí, muchas patatas, pero sumamente pequeñas; la Luna no les va a dar fuerza para desarrollarse. Era de ver —hace notar Aymie— la persuasión con que hablaba aquel agricultor." —"La cosecha —añade— nada tuvo de extraordinario en el número de patatas, pero sí en el tamaño." Y termina esta anécdota en tono sarcástico: "Si yo llego a sembrar las patatas cuando la Luna tenía toda su fuerza, seguramente las hubiera cosechado del tamaño de un melón." (Puig, 2006).

En otra ocasión Aymie se hallaba ocupado en injertar damascos, cuando un injertador de profesión le dijo: —"¡Cómo! ¿Injertas? y ¿no tienes en cuenta la Luna?" —"Te he de confesar que no la he consultado" —respondió Aymie. El profesional, con una sonrisa piadosa, le dijo entonces: —"El injerto prenderá, pero jamás llevará frutos, por haberse hecho en Luna Nueva." El injerto prendió bien, y aquel mismo año dio seis frutos y en el transcurso de los 20 años siguientes el damasco se mostró siempre un árbol fructífero, pese a los augurios del injertador de profesión, que lo condenaba a la esterilidad (Puig, 2006).

Otra de las creencias que se encuentran muy arraigadas en muchos países del mundo es que las fases lunares influyen fuertemente en la durabilidad de la madera dependiendo de la fase lunar en la que se corten los árboles. Para ello argumentan como lo hace el forestal Sauer que la Luna influye de la siguiente manera: cuando la Luna está en creciente la savia de las plantas asciende mucho más fuerte que cuando está en menguante, por eso la madera cortada antes del plenilunio es más esponjosa, tarda más en secarse y está expuesta a mayor agrietamiento, así como al ataque de hongos e insectos que provocan finalmente su menor durabilidad. De ningún modo pueden atribuirse estas diferencias observadas por Sauer a la acción de la Luna, por varias razones: en primer lugar, porque no se puede aplicar la ley de la gravitación universal a la insignificante masa que constituye la columna de líquidos capilares de la savia, y, en segundo lugar, porque la Luna no ejerce influencia sobre el régimen de lluvias (Puig, 2006).

Hay algunos hombres de ciencia como el Dr. Jardi que consideran que es muy difícil sino es que imposible probar si existe o no influencia de la Luna sobre la fisiología vegetal, aún con los instrumentos actuales de medición, por lo que considera también que las creencias populares son más bien supersticiones, de la gente del campo, las cuales se han ido conservando de generación en generación pero sin ningún sustento científico y considera que la pura observación empírica y sin un método o instrumentos adecuados de medición es muy difícil llegar a conclusiones correctas.

En síntesis, las personas que argumentan que la Luna no tiene ninguna influencia sobre las plantas, se basan en experiencias que han tenido al realizar ciertas actividades agrícolas inconscientemente, o bien a propósito sobre algunas creencias populares y han tenido resultados que contradicen la supuesta influencia lunar, es decir, parten suponiendo que la creencia popular es cierta y los resultados que obtienen los contradicen.

Los que aceptan que la Luna influye sobre las plantas

La creencia popular de la influencia de la Luna sobre la plantas es bastante abundante, a continuación se expresan las más mencionadas en la literatura que trata al respecto.

La siembra: si la parte aprovechable de la planta es la parte vegetativa como las acelgas, lechugas, chipilín, etc, deben sembrarse en Luna tierna (novilunio hasta el cuarto creciente), en cambio si el cultivo es para granos como el maíz, frijol, trigo, sorgo, etc, la siembra deberá realizarse preferentemente en luna maciza (Luna Llena hasta 3 días después del cuarto menguante), si son tubérculos como la cebolla, papas, etc, también deben sembrarse en luna maciza; si el cultivo es forrajero deberá sembrarse en Luna Tierna. Aunque algunos autores como Farrerons a lo anterior agregan que depende del tipo de suelo donde vaya a cultivarse, si el suelo es poco fértil aunque sea para granos debe sembrarse en Luna creciente para que las plantas alcancen una mejor altura, en tanto que si el suelo es muy fértil aún los cultivos que la parte cosechable es la vegetativa puede sembrarse en luna menguante.

Cosecha: la cosecha de tubérculos para consumo inmediato deberá realizarse en Luna Nueva, pero si se quiere para semilla como es el caso de la papa deberá realizarse en Luna Maciza, para que dure más y esté en buen estado al momento de la siembra. En el caso de granos deberá realizarse la cosecha en Luna Maciza para que sean más resistentes al gorgojo y tengan mayor duración en el almacén.

Podas: si lo que se requiere es que el árbol desarrolle mayor follaje deberá realizarse en luna tierna. Si lo que se busca es la producción de frutos en el caso de frutales, la poda debe realizarse en luna maciza.

De manera general, los que creen que la Luna tiene influencias sobre el cultivo de las plantas y que han hecho estudios al respecto, agrupan sus efectos en dos aspectos: sobre la savia de las plantas y la fotosíntesis de éstas. En el primer caso consideran que la savia de los vegetales sigue el ritmo del crecimiento de la Luna, es decir, cuando la Luna crece la savia asciende día a día hasta la Luna Llena y cuando la Luna decrece la savia desciende hasta su punto mínimo en el novilunio. En el segundo caso consideran que la luminosidad de la Luna influye sobre la fotosíntesis y la germinación de las semillas.

Teoría sobre la influencia de la Luna en el flujo de la savia de las plantas.

Sin duda alguna la fuerza de atracción de la Luna, más la del Sol, sobre la superficie de la Tierra en determinados momentos ejerce un elevado poder de atracción sobre todo líquido que se encuentra en la superficie terrestre, con amplitudes muy diversas según sea la naturaleza, el estado físico y la plasticidad de la sustancia sobre las que actúan estas fuerzas. Así en determinadas posiciones de la Luna, el agua de los océanos asciende hasta alcanzar una altura máxima, para descender a continuación hasta un nivel mínimo, manteniéndose regular y sucesivamente esta oscilación. También se ha comprobado que este fenómeno se hace sentir en la savia de las plantas, iniciándose el proceso de su influencia desde la parte más elevada para ir descendiendo gradualmente a lo largo de todo el tallo, hasta llegar al sistema radical (Restrepo, 2005), así inicia su texto dicho autor para explicar la influencia de las fases lunares en la savia de las plantas y a partir de dichos argumentos crea una teoría sobre la influencia de la Luna en la savia de los vegetales

De acuerdo con dichos argumentos, Restrepo parte afirmando que la savia de las plantas se concentra en la copa de los árboles, incluyendo ramas, hojas, flores y frutos cuando se está en la fase de Luna Llena hasta el cuarto menguante, fase ésta en la que inicia el descenso de la savia por lo que se concentra en tallos y ramas, para que al llegar a la fase de Luna Nueva la savia termina de descender y se concentre en las raíces de los vegetales, una vez pasada la Luna Nueva inicia el ascenso de la savia para que en el cuarto creciente nuevamente se encuentre más concentrada en tallos y ramas. La figura 10 nos ilustra lo dicho anteriormente.

El fenómeno según dicho autor es más observable en plantas trepadoras, ya que al ser muy delgadas y largas, sus canales por donde la savia transita son más simples y sensibles al efecto de atracción gravitatoria de la Luna que los árboles de tallos leñosos y fuertes.

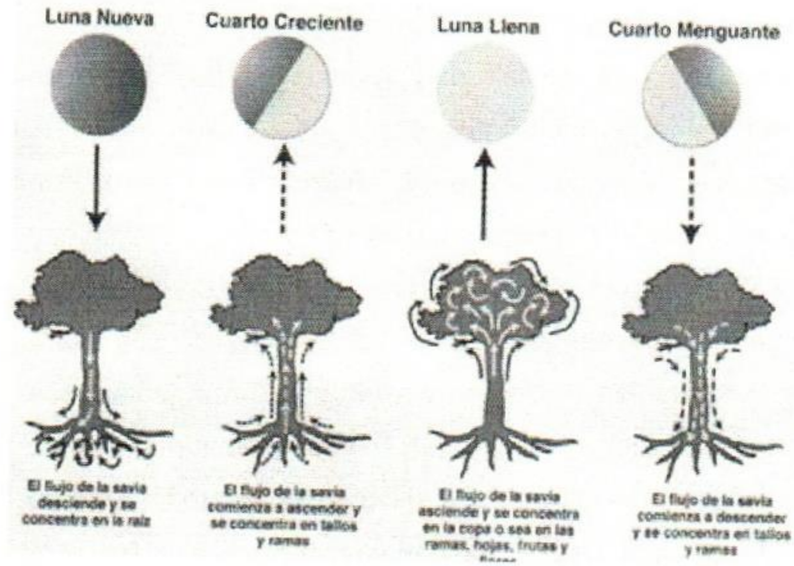


Figura 10. Las fases lunares y la dinámica de la savia de las plantas
Fuente: Restrepo, 2005, p. 5

Otros autores, explican el comportamiento de la savia de las plantas de otras maneras, sin embargo, en lo esencial coinciden, la mayoría de los autores hacen coincidir el mayor ascenso y descenso de la savia con el crecimiento o decrecimiento de la Luna, así ellos mencionan que a medida que la Luna va creciendo la concentración de la savia en la parte aérea de la planta aumenta alcanzando su máximo en la Luna Llena, para luego ir descendiendo nuevamente conforme la Luna decrece hasta alcanzar su punto mínimo en el novilunio y nuevamente se repite el ciclo. Si lo comparamos con la explicación de Restrepo, hay total coincidencia.

Restrepo expone también que hay una relación entre las mareas y la floración de algunas plantas, así como el crecimiento de ellas, esto último lo han estudiado científicos japoneses, al respecto escribe "en cierta ocasión un científico cronometró el crecimiento de 1.24 metros del bambú madame japonés en 24 horas. La acción de la Luna, o más concretamente como ellos lo afirman, la acción de las mareas, se manifiesta en forma muy visible, dado que el crecimiento es mucho más rápido durante el flujo y experimenta un retraso durante el reflujo. La causa se debe a la atracción lunar, que establece un ritmo de presión y depresión de la savia de los vegetales" (Restrepo, 2005, p. 2)

En base a lo dicho anteriormente, a continuación se exponen algunas recomendaciones específicas que Restrepo propone para algunas actividades de ciertos cultivos.

Árboles frutales

En árboles frutales, cuando éstos son pequeños y se quiere tener un mayor desarrollo vegetativo, entonces es recomendable podarlos tres días después de la Luna Nueva hasta los tres días después de la Luna Llena, y cuando son muy vigorosos y se quiere frenar el desarrollo vegetativo y estimular la fructificación, se recomienda podarlos tres días después del plenilunio hasta pasados tres días del Cuarto Menguante, como se muestra en la figura 11. Las podas de saneamiento deben hacerse únicamente en los tres primeros días del Cuarto Menguante.

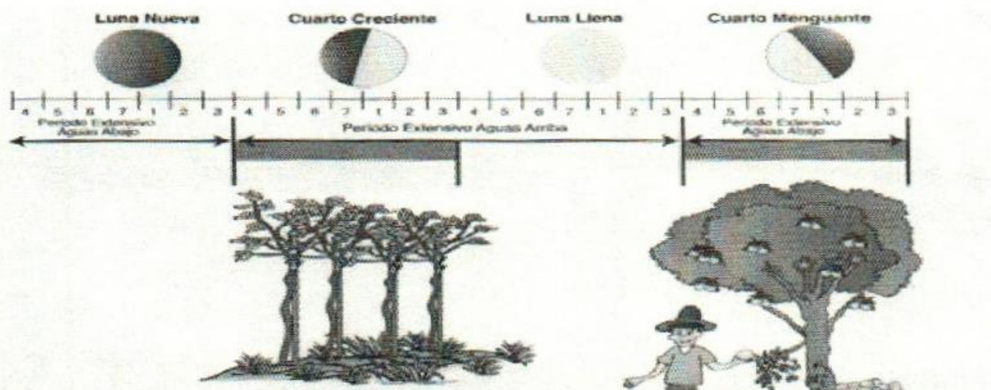


Figura 11. Las fases lunares en la fruticultura
Fuente: Restrepo, 2005, p. 12

Para el caso de injertos se recomienda realizarlos en el período intensivo de aguas arriba (tres días después del Cuarto Creciente y tres días después de la Luna Llena) para que éstos prendan correctamente y la planta sufra menos traumatismo, ya que al haber mayor cantidad de savia facilitará la cicatrización, tal como lo muestra la figura 12.

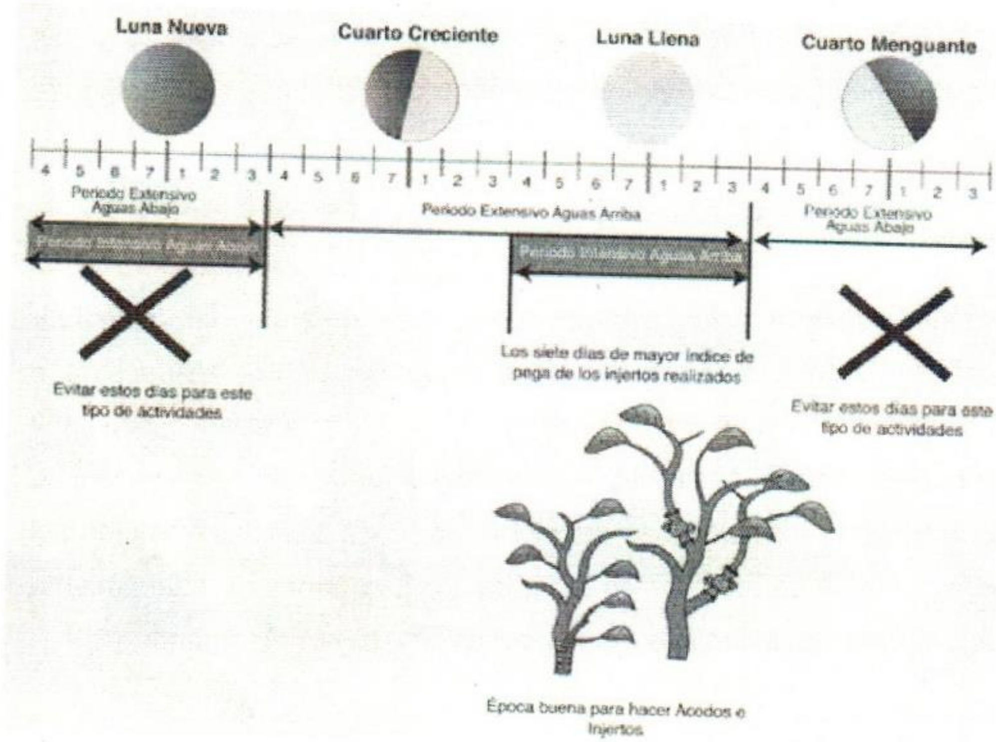


Figura 12. Injertos y acodos
Fuente: Restrepo, 2005, p. 14

Árboles maderables

Para los árboles maderables el principio es el mismo, deben cortarse en aguas abajo, de preferencia cuatro días antes y hasta tres días después del novilunio, lo cual hará que la savia sea mínima en el tallo y por lo tanto al secarse la madera le quedará el menor número de poros, lo cual evitará que los hongos e insectos penetren y provoquen pudrición en la madera, así como disminuirá la cantidad de polillas que puedan reproducirse en su interior, también evitará la rajadura de la madera y con ello ésta tendrá una mejor presentación y la humedad no penetrará tan fácilmente, la figura 13, nos muestra el período más adecuado de corte de árboles maderables.

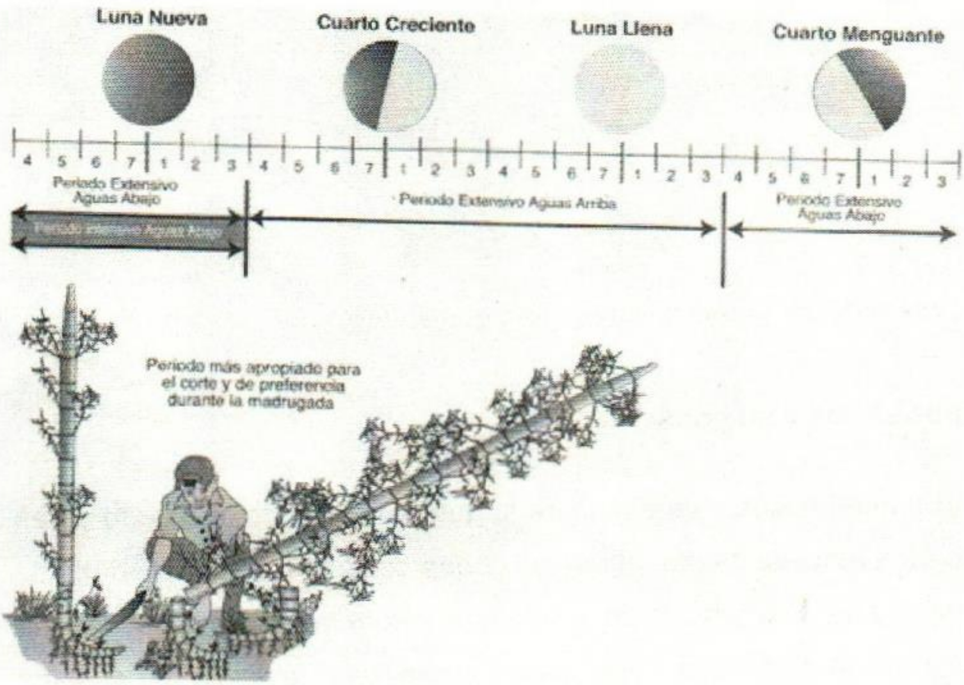


Figura 13. Cosecha de árboles maderables
Fuente: Restrepo, 2005, p. 17

Hortalizas, legumbres frescas y granos verdes para consumo inmediato

La cosecha de hortalizas como lechugas, tomates, chiles verdes, pepinos, etc, legumbres como ejotes, chícharos, etc, y granos verdes para consumo inmediato como chicharos, elote, habas, etc. debe realizarse en el período de aguas arriba, dado que en dicho período las hortalizas, legumbres y granos verdes son más jugosos, dado que la savia se concentra en frutos, hojas, flores, etc. la figura 14 nos muestra con claridad tal situación.

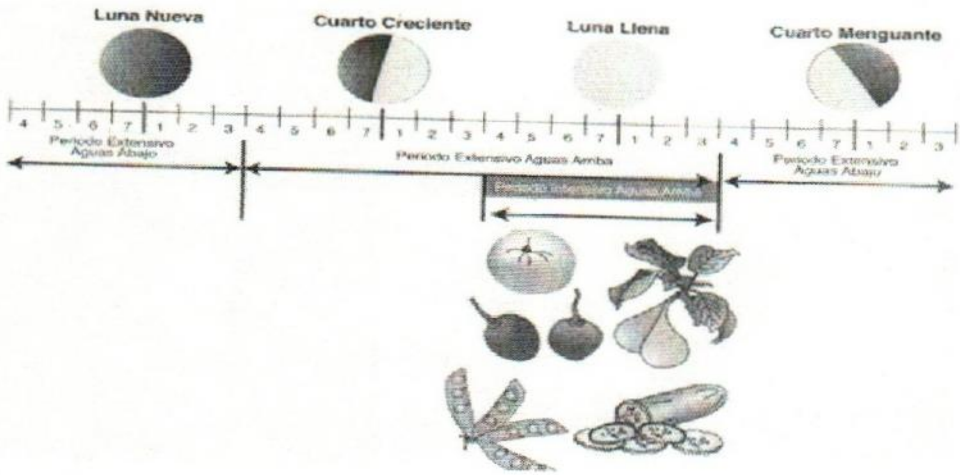


Figura 14. Cosecha de hortalizas y legumbres. Fuente: Restrepo, 2005, p. 31

Cereales, granos secos y su conservación

Para el caso de granos secos y cereales, dado que éstos se pretende que duren en buen estado en almacenamiento, entonces deben cosecharse en el período de aguas abajo para que los granos se encuentren con la menor cantidad de humedad posible y con ello tengan una mayor durabilidad, la figura 15 muestra este período.

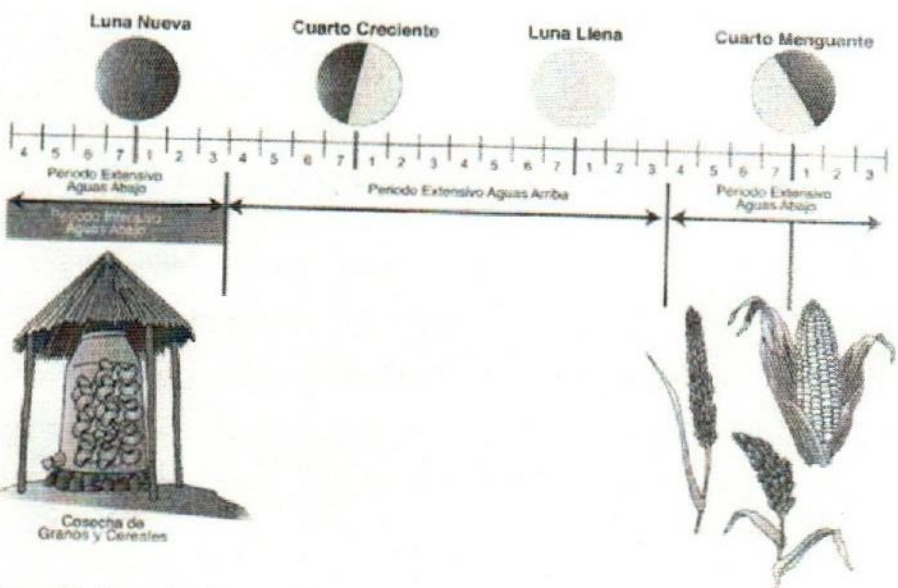


Figura 15. Cosecha de cereales, granos secos y conservación
Fuente: Restrepo, 2005, p. 34

Se puede continuar con un mayor número de ejemplos, sin embargo, se considera que con los anteriores es suficiente para los fines que perseguimos, aquí podemos nuevamente ver, que en esencia lo que se pretende es dar respuesta a la pregunta epistemológica realizada al principio del capítulo. Lo que agrónomos como Jairo Restrepo y campesinos pretenden contestar, es que período lunar proporciona mayores ventajas para cosechar, sembrar, podar, etc. Siempre está presente una necesidad social que satisfacer, lo cual está incentivando a que se pretenda predecir ciertos efectos que tendrá sobre los objetivos que el campesino tiene con sus cultivos y cosecha.

Otra influencia lunar sobre las plantas

La luminosidad de la Luna también se considera que tiene una fuerte influencia sobre las plantas, sobre todo en el proceso de fotosíntesis, la germinación de semillas y la abundancia de plagas. Quienes afirman esto aseguran que la luz de la Luna permite que la fotosíntesis se lleve a cabo, así también que es capaz de penetrar a cierta profundidad de la tierra, lo cual incentiva la germinación de las semillas y que las plagas también se comportan de manera diferente de acuerdo a la iluminación lunar que haya. Sin embargo, este tipo de influencias no están consideradas en el presente trabajo, dado que no es el objetivo que se persigue.

3.2. Análisis histórico – epistemológico de las mareas oceánicas.

Este subcapítulo parte definiendo que es una marea y los factores que provocan las mareas oceánicas, luego se rastrea hasta donde es posible la epistemología de este tipo de mareas, si bien es cierto que para ello se acudirá a los datos históricos, el objetivo no es relatar la historia de ellas, sino tratar de entender que necesidades sociales tenían que satisfacerse en la sociedad donde surgió la explicación de dicho fenómeno y porqué era importante predecirlo.

Este subcapítulo, es de gran importancia para lo que se propone en el presente trabajo, dado que nos permitirá entender mejor la influencia que la Luna y el Sol ejercen sobre las aguas oceánicas y posteriormente poder relacionarla con las explicaciones agronómicas sobre ellas y poder ver sus coincidencias o divergencias.

3.2.1 Las mareas.

Marea se define como la atracción gravitatoria de un cuerpo masivo sobre otro. Comúnmente pensamos en las mareas como un fenómeno que vemos en el mar, sin embargo hay otros ejemplos de los efectos de las fuerzas de mareas, como el efecto drástico que un Agujero Negro tiene sobre la materia en su vecindad, la fuerza del Agujero Negro es tanta que ni siquiera la luz puede escapar de él, o el efecto de las fuerzas de mareas de una enana blanca (tipo de estrella) sobre su compañera cercana que son suficientes para arrastrar materia de la compañera hacia la superficie de ésta, donde puede causar un repentino y drástico incremento en el brillo visto como una explosión de Nova. Otras estrellas binarias también muestran los efectos de las fuerzas de mareas, así como los pares cercanos de galaxias, donde los efectos de la atracción gravitatoria son suficientes para distorsionar los aspectos de las galaxias en formas fantásticas y hermosas.

En el presente trabajo solo estudiaremos las mareas oceánicas, que se definen como el ascenso y descenso periódicos de todas las aguas oceánicas incluyendo las del mar abierto, bahías y golfos, las cuales son provocadas por los siguientes fenómenos: el astronómico, el de la fuerza centrífuga, la orografía marina colindante con las costas, la presión atmosférica y la de los sismos. El más común y predecible es el astronómico, producto de la fuerza causada por la atracción gravitacional de la Luna, y en menor grado, del Sol. Estos fenómenos son predecibles con bastante exactitud ya que dependen de la posición de estos astros. Por ello los estudiaremos a lo largo del presente capítulo. Los demás fenómenos causantes de la marea oceánica a continuación se describen de manera breve.

La fuerza centrífuga

Estrictamente hablando, la fuerza centrífuga es una consecuencia de la rotación de la Tierra y por lo tanto se puede considerar como un efecto astronómico, sin embargo, ésta no depende de la distancia que haya entre la Luna, el Sol y la Tierra, sino simplemente de la rotación de ésta, razón por la cual se separa en este trabajo.

Para tener una idea más clara de cómo actúa la fuerza centrífuga, analicemos la figura 16. En ella la fuerza generadora de marea, es el resultado de dos fuerzas que actúan conjuntamente: la fuerza centrífuga y la fuerza de atracción gravitacional de un astro, en este caso la fuerza gravitacional del Sol.

La figura de la derecha muestra el movimiento de la Tierra, la cual experimenta un movimiento con revolución sin rotación, es decir, rota sobre su propio eje, pero su eje no cambia su posición. El círculo dorado muestra la trayectoria del centro de la Tierra en el espacio, el círculo blanco la trayectoria del punto **A**. Note que la orientación del eje de la Tierra en el espacio no cambia, y como consecuencia de esto el diámetro de ambos círculos es el mismo. Esto significa que la fuerza centrífuga es igual en cualquier punto sobre la Tierra y en el interior de esta, tanto en magnitud como en dirección.

La fuerza gravitacional ejercida por el Sol siempre apunta hacia el centro de éste. El efecto de esta fuerza sobre puntos en la superficie de la Tierra varía entonces con la posición, tanto en magnitud como en dirección. La fuerza resultante del balance se muestra en el diagrama de la izquierda. Las flechas blancas indican una fuerza neta en la dirección vertical, mientras que las flechas sólidas indican una fuerza que contiene también una componente horizontal. Esta componente horizontal de la fuerza resultante es la fuerza generadora de marea. El mismo análisis sería para el caso de que se tratara si la Luna fuese el cuerpo perturbador.

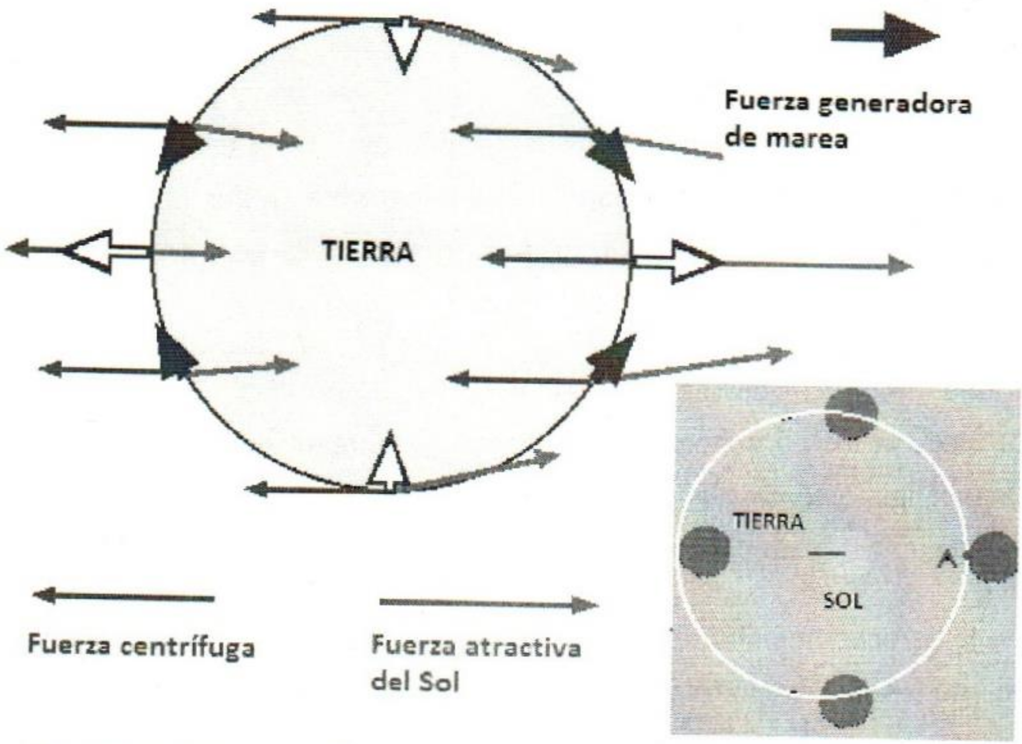


Figura 16 . La fuerza centrífuga y la solar para generar la marea. Fuente: Tomczak 1996

La orografía marina colindante con las costas

La orografía marina en los límites costeros influye fuertemente tanto en el nivel de las mareas como en la periodicidad de éstas. Si el talud continental está muy próximo a la costa, las mareas son normales en su altura y periodicidad, en cambio en donde hay entrantes como es el caso de la bahía de Fundy en Nueva Escocia, Canadá, las mareas son muy altas promediando alturas de alrededor de los 12 metros y rebasando los 16 metros en las mareas más altas de la primavera. Algo parecido ocurre en Inglaterra, el estuario Sever, divide a Gran Bretaña y Gales y forma un embudo que genera un coeficiente de marea que puede superar los 12 metros. En Inglaterra y en todos los países que colindan con el Canal de la Mancha, presentan fuertes variaciones en el nivel del mar, dado que dicho canal tiene una profundidad promedio de solo 100 metros y una gran longitud, lo cual provoca fuertes mareas y que su periodicidad no sea tan fácil de predecir.

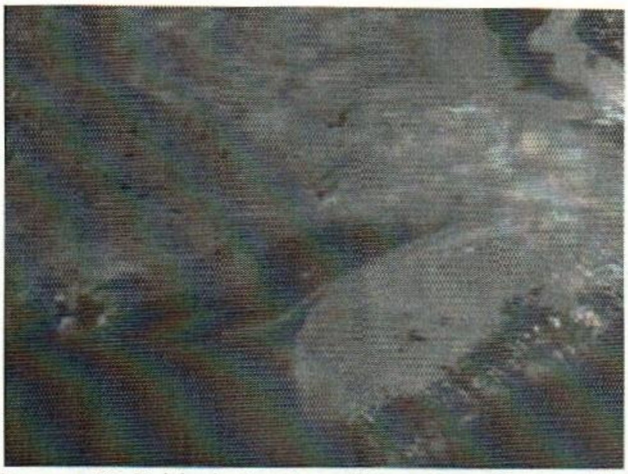


Imagen 21. Bahía de Fundy en Nueva Escocia Canadá. Fuente Video la Luna y su influjo

Al otro lado del mundo, en Australia occidental, la marea alta ha inundado la bahía de Talbot. Se trata de una entrante de la remota costa de Kimberley que está prácticamente cerrado. Los elevados cabos de la entrada crean un estrecho canal por el que las mareas deben pasar dos veces diarias en cada dirección. Al subir la marea la bahía se llena hasta sus límites y al bajar una gigantesca montaña de agua atraviesa el estrecho canal creando una catarata salada de una inmensa fuerza.

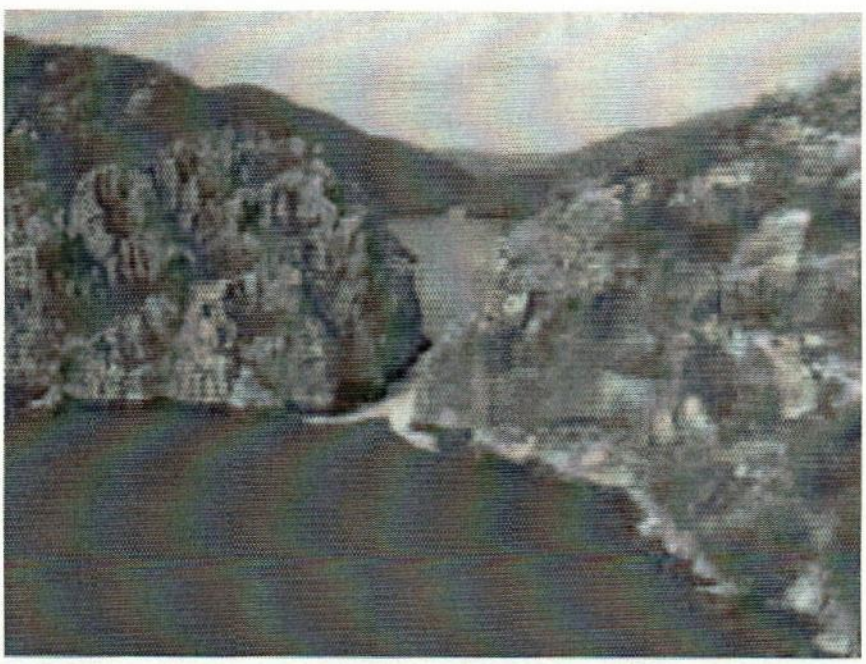


Imagen 22. Bahía de Talbot Australia. Fuente: Video La Luna y su influjo

No en todo el mundo ocurren dos mareas altas y dos mareas bajas cada día, hay lugares que solo ocurre una. Un ejemplo lo tenemos en Veracruz, México, en donde lo más normal es que ocurra solamente una marea alta y una baja, lo cual se debe a la orografía marina del Golfo de México. Existen otros lugares en el mundo que también presentan dicho comportamiento, dado que tienen una gran extensión de aguas de poca profundidad relativa, lo cual hace que las aguas impulsadas por el océano tarden en llegar a la costa y cuando deben refluir, la inercia los continúa llevando hacia el continente y cuando refluyen se topan con otra corriente elevada y tardan en su nivel alto más tiempo, hasta que finalmente refluyen (ver apéndice E).

La presión atmosférica

Otro de los factores que afectan las mareas es la presión atmosférica y se conocen como mareas barométricas. La presión atmosférica para nada es constante y varía entre 90 y 140 hectopascales. Un hectopascal puede provocar una variación en la marea de un centímetro, por lo que el nivel del mar puede variar hasta en 50 cm por causa de la presión atmosférica. Desafortunadamente estas variaciones no son periódicas y son muy difíciles de predecir, una forma de hacerlo es a través del estado del tiempo, ya que una presión atmosférica alta se relaciona con un mal estado de éste, es decir, con lluvias, nubosidad, vientos, etc, y un buen estado (cielo despejado, vientos suaves, etc) se relacionan con una marea baja.

Se ha intentado predecir las mareas barométricas a través del barómetro, que es el instrumento que mide la presión atmosférica, sin embargo, es posible tener buen tiempo con barómetro alto y viceversa, sin embargo las subidas del barómetro son más seguras del buen tiempo.

En el caso de las personas que habitan las zonas costeras, es común que relacionen las mareas con el mal o buen tiempo, ya que la experiencia les indican que en caso de cielos despejados las mareas son más suaves que en el caso de cielos nublados.

Los sismos

Los sismos también son capaces de provocar maremotos e inclusive tsunamis, los cuales provocan olas realmente enormes que provocan que el nivel de las mareas aumente drásticamente, sin embargo, hasta el momento no han podido ser predecibles y son muy esporádicos. Si bien es cierto que son muy peligrosos, para los objetivos del presente trabajo no tienen importancia, por lo que solo se les dedica este párrafo.

3.2.2. Las mareas oceánicas en algunas culturas antiguas.

Seguramente los hombres antiguos que habitaban en las costas de nuestro planeta, observaron que el nivel del agua en los mares y bahías cambiaba con cierta regularidad. Al principio se han de haber maravillado de dicho fenómeno y al no encontrarle una explicación lo asociaron al poder de alguna deidad, pero con el transcurso del tiempo se fueron formulando algunas teorías (explicaciones) de dicho fenómeno, a continuación se presentan algunas de ellas, sobre todo las que se pudieron documentar.

Los chinos en la antigüedad adjudicaron dos causas a las mareas: primera, el agua era la sangre de la Tierra y las mareas sus latidos del pulso. Segunda, las mareas se producen por la respiración de la Tierra (Mar de Fora, 2008). Aquí se puede apreciar que los chinos consideraban a la Tierra como un ser vivo y por lo tanto de acuerdo a su cosmovisión trataron de dar una explicación del fenómeno, se puede ver en estas concepciones que el objetivo es explicar al fenómeno, no predecirlo para obtener algunas ventajas.

Ko-Hung, un escritor chino del siglo cuarto de nuestra era, realiza una explicación algo extraña sobre las mareas vivas (sicigias) y las mareas muertas (bajamar), él dice que cada mes lunar el cielo se mueve hacia el Este y después hacia el Oeste y por eso las mareas son alternativamente mayores y menores, es decir realiza una explicación de porqué las mareas son más altas en el novilunio y plenilunio y porque son más bajas en los cuartos (creciente y menguante). Se puede observar que dicho autor ya había avanzado con respecto a lo dicho al inicio del párrafo, ya que trata de explicar el fenómeno de las mareas altas y bajas a través del movimiento del cielo que él apreciaba.

Mar de Fora (2008) menciona que G. H. Darwin hace referencia a lo que los árabes escribieron sobre las mareas, tomando como referencia las traducciones de Browne, escribiendo al respecto:

Sabed que en diferentes períodos de las cuatro estaciones, y durante los primeros y últimos días de los meses lunares, y a ciertas horas del día y de la noche, los mares se encuentran en condiciones especiales respecto a la elevación de sus aguas, su corriente y agitación. En cuanto a que las aguas se elevan, se supone que cuando el Sol obra sobre ellas, se rarifican y se expansionan, y buscan un espacio más amplio que en el que estaban antes encerradas y que una parte repele a la otra en las direcciones, Este, Oeste, Sur, Norte y Cenit y al mismo tiempo se levantan varios vientos en la orilla del mar (Mar de Fora, 2008). Los árabes asocian a la Luna y al Sol con las mareas y las estaciones del año, ya que han observado que la elevación de las aguas tienen ciertos comportamientos dependiendo de los factores ya mencionados. La predicción se puede percibir aunque no del todo claro, ya que se refieren a que en las estaciones y en los primeros y últimos días de los meses lunares se dan ciertas condiciones de las mareas, se ve el germen de predecir el comportamiento de ellas.

3.2.3. Las mareas y la Luna

En la cultura griega de siglo I a. C., uno de los autores más destacados sobre la teoría de las mareas fue Posidonio de Apamea (135 – 51 a. C.), sin embargo, sus escritos originales se han perdido y solo se han podido rescatar algunas partes a través de las citas que otros autores han realizado en sus obras, uno de ellos es Estrabón del cual Aguilar realiza la siguiente cita:

“Dice Posidonio que en el movimiento del océano se observa regulares secuencias como un cuerpo celeste, en periodos diario, mensual y anual regulados por la influencia de la Luna. Por qué cuando la Luna se halla sobre el horizonte al Este a una distancia de un signo del Zodiaco de 30° empieza el flujo en el mar y se eleva visiblemente sobre las tierras hasta que la Luna llega al meridiano. Cuando lo ha pasado, el mar a su vez desciende gradualmente hasta que la Luna llega sobre el horizonte occidental a la distancia del signo del Zodiaco. Entonces queda quieto mientras se pone la Luna y todavía un poco más hasta tanto ésta, moviéndose detrás de la Tierra, no llega a una distancia de un signo del Zodiaco debajo del horizonte. Entonces avanza de nuevo hacia el mar hasta que la Luna alcanza el meridiano inferior; y desciende después mientras la Luna se mueve hacia el Este hasta que llega a estar en un signo del Zodiaco por debajo del horizonte; permanece en reposo hasta que vuelve a la misma distancia sobre el horizonte, en cuyo momento empieza otra vez el flujo. En cuanto a su movimiento mensual dice que las mareas son mayores en las conjunciones (del Sol y Luna), crecen menos hasta el tiempo de media luna (cuarto creciente) y vuelve aumentar hasta la Luna Llena, para disminuir nuevamente hasta que se reduce a la mitad (cuarto menguante). Después continúa el aumento hasta la conjunción. Los movimientos anuales de las mareas, dice que los conoció por los habitantes de Cádiz. Le dijeron que el flujo y el reflujo de las mareas eran mayores en el solsticio de verano. El por si mismo supuso que las mareas disminuyen desde el solsticio hasta el equinoccio, y después aumentan entre el equinoccio y el solsticio de invierno; y vuelven a ser menores hasta el equinoccio de primavera y mayores hasta el solsticio de verano" (Mar de Fora, 2008).

En el párrafo anterior es claro que Posidonio realiza una descripción diaria y mensual del comportamiento de las mareas de acuerdo con la posición que la Luna guarda en su trayectoria alrededor de la Tierra y las conjunciones que tiene con el Sol, en tanto que la explicación del comportamiento anual se relaciona con las estaciones del año.

Como se puede apreciar, las mareas ya se podían predecir desde el siglo I a. C., y sus predicciones estaban en base a la posición que la Luna guarda diariamente en su paso alrededor de la Tierra. Pero ahora cabe preguntarnos, ¿qué fue lo que motivó la predicción de las mareas?.

Seguramente en los pueblos o tribus que se establecieron en las costas del planeta, predecir las mareas era de gran utilidad para determinar el momento de iniciar la pesca, ya que los animales marinos que salen a las orillas, bahías o esteros tienen cierto comportamiento de acuerdo con la subida o bajada del nivel del mar y los hombres tenían que aprovechar dichos comportamientos para obtener ventaja y realizar una pesca lo más fructífera posible. Actualmente es posible observar como algunas tribus en Maputo Mozambique, en la costa oriental de África del sur, - los Tembe Tonga - elaboran trampas para capturar peces y otras criaturas marinas. Acomodan la trampa y una vez que la marea baja y los animales han quedado atrapados en ellas, los hombres lancean a los peces atrapados y las mujeres recogen los mariscos y erizos de mar.

Imagen 23. Tembe Tonga lanceando un pez atrapado en la trampa. Fuente: Video La Luna y su influjo

Sin embargo, quizá lo que más motivó la predicción de las mareas fueron las actividades bélicas del imperio romano y sobre todo cuando el emperador Julio César realizó sus grandes conquistas y en particular sobre los galos y los británicos, ya que como él mismo lo narra en su libro *Commentarii de Bello Gallico* estuvo a punto de sufrir una de sus peores derrotas con los británicos por no haber tomado en cuenta las mareas y quedar atrapado con sus soldados en la desembocadura del río Támesis en el Canal de la Mancha, lo cual es entendible porque él estaba más acostumbrado a las luchas en el mediterráneo en donde las mareas son mucho más pequeñas. Lo anterior explica en cierto modo la relación que realizó Posidonio entre las mareas y la Luna, ya que dichas batallas bélicas se desarrollaron entre los años 58 y 51 a. C., que corresponde a los últimos años de vida de Posidonio, quien a pesar de ser griego trabajó para el imperio romano y su teoría se asocia a la necesidad que el emperador romano tenía para planear sus batallas en costas británicas o francesas.

Lo anterior permite ver como las necesidades sociales impulsan la predicción de ciertos fenómenos, en el caso de la mareas, se hizo necesario su predicción para poder obtener ventaja de ella en la pesca y en las batallas bélicas, a pesar de que no se explicara por qué sucedían, lo interesante fue que lo asociaron a la Luna y a las estaciones del año y sus predicciones eran útiles para los fines que se perseguían. Otros fenómenos también se han utilizado antes de saber porqué se comportan de cierta manera, por ejemplo, el lanzamiento de proyectiles tardó muchos siglos para determinarse la trayectoria que éstos siguen, sin embargo, el lanzamiento de ellos, el hombre los usó desde la antigüedad, desde esas épocas ya sabía que tenía que lanzarlos con cierto ángulo para dar en el blanco, aunque no sabía por qué tenían dicho comportamiento.

3.2.4. Galileo y las mareas.

Galileo Galilei en 1631 en su máxima obra Diálogos, expone lo que él consideró su obra máxima, la teoría de las mareas, aunque ha sido calificada de errónea por otros científicos vale la pena exponerla muy brevemente y lo más importante será estudiar la epistemología de ellas. A continuación se expone dicha teoría:

"La teoría se basa en la referencia a los movimientos de un líquido en relación al recipiente que lo contiene cuando este se ve sometido a sucesivas aceleraciones y deceleraciones. Galileo afirma que en la doble hipótesis de un doble movimiento de la Tierra un movimiento de rotación uniforme en torno a su centro y un movimiento de traslación uniforme de ese centro a lo largo de una órbita circular alrededor del sol las grandes masas de agua sobre la superficie se comportan en sus cuencas naturales como el agua en tal recipiente. En efecto, señala, la composición de dos movimientos uniformes de rotación la diurna y la orbital anual tiene como resultado que la cuenca de todo lago, mar u océano, tiene un movimiento absoluto no uniforme, al añadirse la rotación diurna al movimiento orbital en mitad de la noche y suprimirse en mitad del día, mientras que el agua, fluida y libre horizontalmente, no se ve afectada por esa aceleración en cuanto que no está contenida por una orilla. Para facilitar la comprensión de ese resultado Galileo lo explica mediante la figura 24, donde para simplificar hace coincidir el plano del ecuador con el de la eclíptica. El círculo EFDG representa la Tierra, B su centro, y el círculo C con centro en A la órbita anual. Un punto fijo sobre la Tierra recorre el pequeño círculo en un día y el centro B recorre el círculo C en un año, teniendo ambas rotaciones el mismo sentido, desde D hacia E. Galileo muestra mediante la figura que *"cuando [la superficie terrestre} gira alrededor de su propio centro, resultará forzosamente para las partes de esa superficie, por el acoplamiento entre el movimiento diurno y el movimiento anual, un movimiento absoluto unas veces muy acelerado y otras igualmente retardado para las partes de esa superficie f.,.} Por tanto, si es verdadero (y la experiencia prueba que es muy cierto) que la aceleración y la ralentización del movimiento de un vaso hace ir y venir, y subir y luego descender hasta sus extremos, el agua que contiene, quién no concederá que tal efecto pueda, o más bien deba, ocurrir del mismo modo y necesariamente en el caso de los mares, cuyos recipientes están sometidos a variaciones semejantes?"* "(Souffrin, 2007, p. 209).

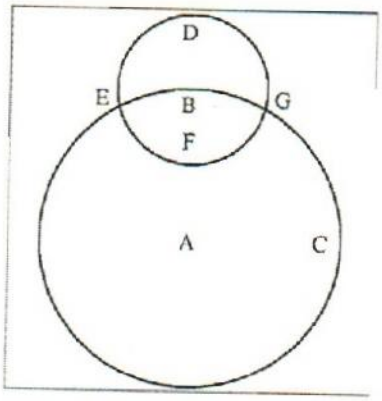


Figura 17. Empleada por Galileo

Lógicamente, la teoría de Galileo implicaría que las mareas altas ocurriesen al medio día todos los días, sin embargo la experiencia muestra que éstas se van retrasando alrededor de 50 minutos cada día durante todo el mes lunar, éste es el argumento principal que se ha empleado para considerar a la teoría de las mareas de Galileo errónea.

Pero en Epistemología es interesante preguntarse ¿qué motivó a Galileo crear una teoría sobre las mareas?. Para poder responder a esta interrogante es preciso señalar que Galileo originalmente su obra no se llamaría Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo, sino Del flujo y del reflujo de las mareas (Souffrin, P. 2007), pero por sugerencias de amigos y para que fuese autorizada su publicación por la Iglesia católica tuvo que cambiarle a dicho titulo, pero lo esencial de dicha obra era la teoría del flujo y el reflujo de los mares como él mismo lo menciona.

La historia nos relata perfectamente las dificultades que tuvo Galileo para la publicación de su obra por la cosmología dominante de esa época y la que él poseía que era totalmente contraria, ya que los aristotélicos eran geocentristas y Galileo heliocentrista, y si bien es cierto que el telescopio les permitió ver las fases de Venus, las lunas de Júpiter, las montañas de la Luna y las manchas del Sol, los geocentristas se seguían sintiendo más aristotélicos que nunca, se necesitaba una prueba más contundente aquí en la Tierra para que la filosofía natural de aquella época se derrumbara totalmente y cediera su paso al heliocentrismo. Eso fue lo que motivó a Galileo a realizar la teoría de las mareas, puesto que seguramente él estaba consciente que quien lograra una explicación convincente ganaría prestigio y enterraría para siempre el aristotelismo, tan es así que en las acusaciones que la inquisición le hace a Galileo solo una de las ocho "herejías" por la que fue juzgado eran de orden filosófico y era precisamente la teoría de las mareas.

Como se puede intuir de lo expresado en los párrafos precedentes, Galileo, su principal interés no era predecir las mareas y quizá por eso no consideró la variación que éstas presentan en el transcurso del mes lunar, él necesitaba una prueba contundente del movimiento de rotación y traslación de la Tierra que le permitiera dar el jaque mate a los aristotélicos, quizá eso explique por qué en su teoría no relacione el fenómeno con la Luna y el Sol, sino simplemente con los postulados de su teoría. Aunque su teoría es considerada como errónea sus principios sobre los que lo basa no lo son, ya que el movimiento de rotación y traslación de la Tierra si provocan efectos reales en las mareas y desde ese punto de vista no es falsa, sin embargo, no entramos a dicha discusión dado que no es nuestro objetivo.

3.2.5 Isaac Newton y la teoría de las mareas.

Isaac Newton (1642 – 1727) es quizá el científico más grande del siglo XVII, en su máxima obra *Philosophiae naturalis principia mathemática*, más conocido como Principia, describe la teoría general de la gravitación universal, con la cual explica porqué cualquier objeto cercano a la superficie de la Tierra cae hacia el centro de ésta con una aceleración constante, porqué la Luna en lugar de caer como cualquier objeto, orbita alrededor de la Tierra, porqué los océanos presentan las mareas y porqué la Tierra y todos los planetas del sistema solar orbitan alrededor del Sol. Newton establece que todos los cuerpos se atraen unos a otros con una fuerza proporcional a la cantidad de masa que poseen e inversamente como el cuadrado de sus distancias que los separa, a lo que se le ha llamado ley de gravitación universal.

Basado en la ley de gravitación universal, Newton explica el porqué de las mareas, tanto de manera diaria, durante un mes sinódico y su comportamiento anual, si bien Posidonio ya había observado la relación que las mareas tenían con la posición de la Luna en su órbita, Newton establece porqué suceden, le da una explicación científica y sienta las bases para predecir las mareas en cualquier parte del mundo.

Para explicar las mareas, Newton supone que la Tierra es totalmente esférica y rodeada por un canal de agua a una profundidad uniforme y luego analiza que pasaría si rotase y hubiese dos fuerzas que la atrajeran, en éste caso las fuerzas gravitacionales de la Luna y el Sol y concluye que al rotar la Tierra el canal de agua fluiría más rápidamente en donde se ejerce la fuerza, pero como también el Sol ejerce una atracción haría que el agua refluyera una vez que la fuerza de éste superara la fuerza de atracción lunar y de ésta manera explica las mareas y los flujos y reflujos de los mares.

Para entender la teoría newtoniana de las mareas, iniciamos transcribiendo lo que Edmund Halley, apologista principal de Newton describió sobre ella: "el océano, que es fluido, cede a la fuerza más débil, levantándose donde es menos presionado y hundiéndose donde es más presionado.... donde la Luna está perpendicular; ya sea arriba o abajo del horizonte ... [es donde] la fuerza de gravedad está más disminuida ... el mar; que de lo contrario sería esférico, bajo la presión de la Luna debe tomar forma oval, con el diámetro mayor allí donde la Luna está vertical ... la Luna al cambiar su posición al girar alrededor de la Tierra una vez por día, [ya que el] oval de agua gira con ella, ocasiona así dos flujos y dos reflujos observables cada veinticinco horas (Fig 18)" (Ripa, P. 1996)

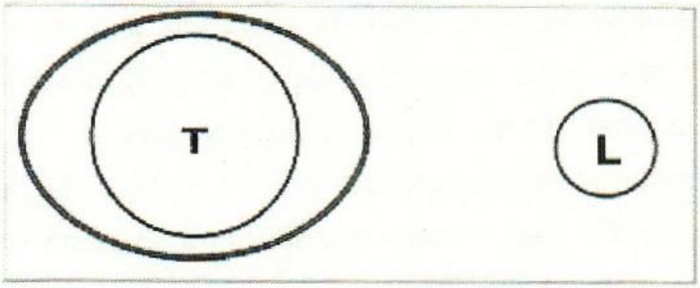


Figura 18. Esquema de Halley sobre la deformación del mar por la Luna. Fuente: ripa, P. 1996

En el Principia (Newton, 1987), en el libro III, Proposición XXIV. Teorema XIX, denominado *"Que el flujo y reflujo del mar obedecen a la acción del Sol y la Luna"* expone con toda claridad la teoría de las mareas, la cual de manera sintética y breve se puede explicar de la siguiente manera:

Las mareas suceden por la atracción gravitatoria que ejercen la Luna y el Sol sobre nuestro planeta y por la fuerza centrífuga que se genera al girar la Tierra en torno al centro de gravedad del sistema Tierra – Luna. La Tierra gira sobre su propio eje cada 24 horas, en cambio la Luna da una vuelta alrededor de la Tierra cada 29.5 días aproximadamente y la Tierra a su vez le lleva un año darle una vuelta al Sol. Estos movimientos, provocan que un lugar específico de la Tierra sufra diferentes atracciones gravitatorias por la Luna y el Sol y en consecuencia provoquen dos mareas altas y dos bajas alrededor de cada 24 horas y 50 minutos. Durante un mes lunar se dan las mareas de sicigias en las conjunciones y oposiciones de la Luna y el Sol y las mareas más bajas en las cuadraturas, como se puede apreciar en la figura 19.

Como se aprecia en la figura 19, en la Luna Nueva la atracción gravitacional del Sol y nuestro satélite se suman, dado que la atracción gravitacional de ambos astros se dan en el mismo sentido, por lo que la marea en la Tierra será la más altas en el lado que da hacia dicha atracción. Exactamente en el lado opuesto del planeta también sucede una marea alta, debido a que el centro de gravedad de la Tierra se desplaza un poco hacia el lado en que se encuentran la Luna y el Sol, lo que provoca que el agua esté menos presionada por la fuerza de gravedad de la Tierra y entonces también se eleve. Como la Tierra rota una vez cada 24 horas, habrán dos mareas altas y dos bajas cada 24 horas y 50 minutos, dado que al rotar la Tierra, la Luna también se desplaza por su órbita. A su vez la parte de la Tierra que quede formando un ángulo de 90º entre el centro de la Tierra, la Luna y el Sol, estarán en marea baja, puesto que la Tierra los está atrayendo más fuertemente hacia su centro.

En el Cuarto Creciente y Menguante la Luna y el Sol se encuentran en cuadratura (forman ángulos de 90º), por lo que sus fuerzas se contrarestan y provocan que las mareas altas sean las más bajas del mes sinódico y las mareas bajas las más altas, puesto que la Tierra los atrae con mayor fuerza hacia su centro que en cualquier otra posición. Cuando suceden dichas mareas se les llama bajamares.

En la Luna Llena, la Luna y el Sol se encuentran a 180º, lo que provoca que ambos astros jalen en sentidos opuestos en los lados opuestos de la Tierra, lo cual provoca que las aguas oceánicas estén menos presionadas y por lo tanto se eleven fuertemente provocando también las mareas altas o de sicigias en los lados que dan hacia cada uno de los cuerpos celestes referidos.

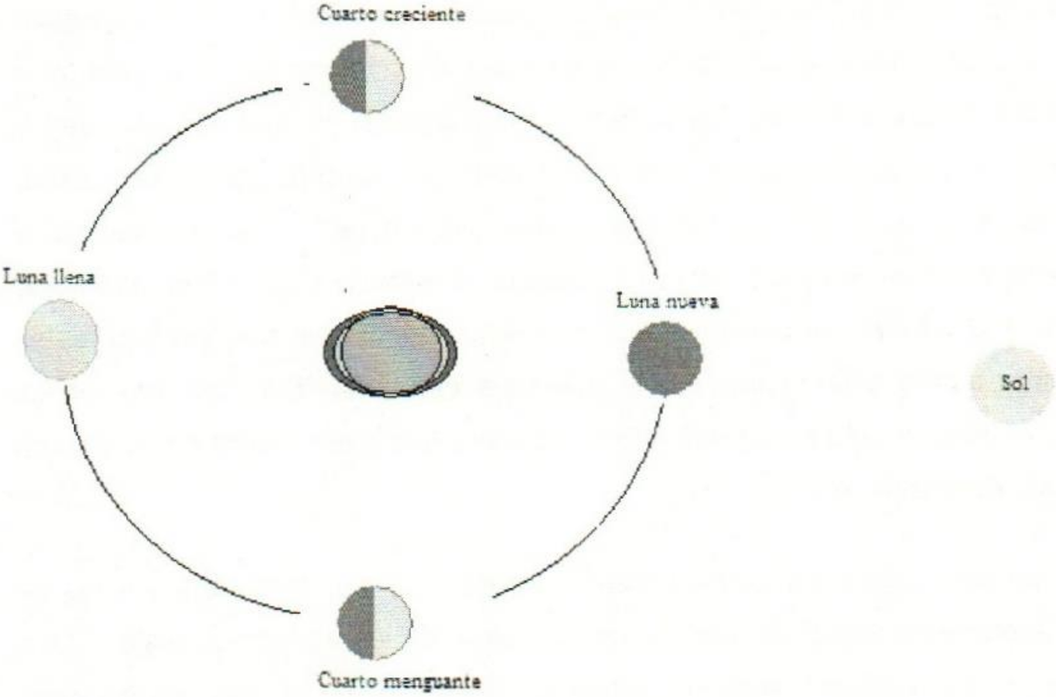


Figura 19. Las mareas, las conjunciones y las cuadraturas de la Luna y el Sol

Como la Tierra rota una vez cada 24 horas, pero le lleva 48 minutos y casi 49 segundos más para alcanzar la misma posición respecto a la Luna, entonces en un tiempo de 24 horas, 48 minutos y 48.81 segundos ocurrirán dos mareas altas y dos mareas bajas, lo que explica que las mareas tengan un retraso de 48 minutos y 48.81 segundos respecto a un día anterior, ya que siguen exactamente el ritmo de la Luna. En otros términos, se puede decir que la rotación de la Tierra explica las dos mareas altas y las dos bajas que ocurren en el transcurso de 24 horas, 48 minutos y 48.81 segundos.

El movimiento de traslación de la Luna alrededor de la Tierra, explica por qué ocurren dos mareas de sicigias cada 29.53 días y dos bajamares, ya que cuando la Luna y el Sol se encuentren en conjunción o en oposición generarán las mareas más altas (sicigias) lo cual ocurre en Luna Nueva y Luna Llena respectivamente, y cuando están en cuadraturas que corresponde al cuarto creciente y cuarto menguante se darán las bajamares.

Sin embargo, las mareas altas no suceden exactamente cuando nuestro satélite natural se encuentra en el meridiano, ni las más bajas cuando se da la cuadratura entre el Sol y la Luna, sino dos o tres horas después, lo cual se debe según Newton a la fricción del agua y a la profundidad de los océanos en las costas, entre menos profundas sean las costas más tiempo tardará en producirse la marea alta después del paso de la Luna sobre el meridiano, o las mareas bajas después de la cuadratura del Sol y la Luna, llegando inclusive a existir lugares en donde solo ocurre una marea alta y una baja cada día. Sin embargo en los océanos profundos solo se da una diferencia entre una y dos horas por la fricción del agua al desplazarse.

Newton también explicó porque las mareas de invierno son más altas que las de verano, al respecto dice: " los efectos de los astros dependen de sus distancias a la Tierra, pues cuando se encuentran a menor distancia sus efectos son mayores y cuando están a mayor distancia sus efectos son menores, y ello como el cubo de su diámetro aparente. Por ello el Sol, en tiempo de invierno, cuando está en su perigeo, tiene mayor efecto, y provoca mareas algo mayores en las sicigias y algo menores en las cuadraturas que en la estación de verano. Y todos los meses, cuando la Luna está en el perigeo, provoca mayores mareas que quince días antes o después, cuando está en su apogeo. A ello se debe que las mareas máximas no se suceden en dos sicigias inmediatamente sucesivas." (Newton, 1987, p. 505).

Además, explica porque las mareas de cualquier estación del año no son iguales todos los años y porqué es posible encontrar las sicigias más altas, las más bajas, así como las bajamares más bajas o más altas en el transcurso del tiempo dependiendo de las posiciones de de la Luna y el Sol, textualmente se tiene la siguiente cita.

"El efecto de ambos astros depende también de su declinación o distancia al ecuador, pues si el astro estuviera situado en el polo, atraería constantemente a todas las partes de las aguas sin intensificación ni remisión alguna de su acción, por lo que no podría provocar reciprocación de movimientos. En consecuencia, los astros a medida que declinan del ecuador hacia cualquiera de los polos, van perdiendo fuerza gradualmente, debido a lo cual excitan mareas menores en las sicigias solsticiales que en las equinocciales. En las cuadraturas solsticiales, sin embargo, provocan mareas mayores que en las cuadraturas equinocciales pues la fuerza de la Luna, situada entonces en el ecuador, supera más que nunca a la fuerza del Sol. En consecuencia, las mareas más altas tienen lugar en las sicigias próximas a ambos equinoccios, y las más bajas en las cuadraturas también próximas a ellos, y las más altas en las sicigias es siempre seguida por la más baja en las cuadraturas, como demuestra la experiencia. Sin embargo, como el Sol dista menos de la Tierra en invierno que en verano, ocurre que las mareas más altas y más bajas son más frecuentes antes que después del equinoccio vernal y más frecuentes después que antes del equinoccio otoñal."(Newton, 1987 p. 506)

Otro factor que influye sobre las mareas es la latitud, lo cual se debe a que la Luna cada mes lunar tiene declinaciones hacia el norte y hacia el sur, por lo que las mareas son más altas en el hemisferio norte cuando la Luna declina hacia estas latitudes y más bajas cuando declina hacia el sur. Además el Sol también presenta declinaciones en su movimiento aparente en el transcurso del año, por lo que sí coinciden las declinaciones de ambos astros hacia el mismo hemisferio se darán las mareas más altas y viceversa. Al respeto Newton textualmente menciona:

" ... cuando la Luna cambie su declinación al otro lado del ecuador, la marea más alta se convertirá en una más baja. Y la mayor diferencia de las pleamares tendrá lugar aproximadamente con ocasión de los solsticios, especialmente si el nodo ascendente de la Luna se aproxima primero a Aries. Así, la experiencia demuestra que las mareas matutinas del invierno son mayores que las vespertinas, y que las mareas vespertinas del verano son mayores que las matutinas, en Plymouth por un pie de altura, pero en Bristol por una altura de quince pulgadas, según las observaciones de Colepress y Sturmy" (Newton, 1987, p. 507).

Con lo expuesto hasta aquí, es claro que la causa fundamental de las mareas para la teoría newtoniana es la variación en la distancia de un punto determinado del mar con respecto a la Luna y al Sol, dicha variación lo provocan los movimientos de rotación y traslación de la Tierra y los de la Luna alrededor del planeta, así como las inclinaciones en el eje de rotación terrestre y la inclinación de la órbita lunar respecto a la eclíptica.

Una vez que se ha expuesto la teoría de las mareas de Newton, es preciso hacer el análisis epistemológico y para ello hay que tratar de encontrar respuestas a la siguiente pregunta, ¿qué fue lo que motivó a Isaac Newton formular la teoría de las mareas?.

Antes que nada hay que recordar que en el siglo XVII había una fuerte discusión entre los de cosmovisión geocéntrica y los de heliocéntrica, si bien éstos últimos habían ido ganando terreno con los descubrimientos astronómicos que permitió el telescopio, los aristotélicos habían encontrado otro método para seguirse sosteniendo, que era la represión a través de la inquisición cristiana, basta recordar a Galileo quien para salvar su vida tuvo que retractarse públicamente de su cosmovisión heliocéntrica. Entonces es fácil entender que Newton necesitaba además de las pruebas astronómicas otra aquí en la Tierra, que le permitiera comprobar su teoría e inclinar la balanza hacia la teoría heliocéntrica y enterrar definitivamente la geocéntrica. Consideramos que la teoría de las mareas de Newton jugó ese papel para él, puesto que coincidía perfectamente su teoría con el comportamiento de los flujos y reflujos del mar.

Aquí nuevamente vemos, como las necesidades sociales motivan a crear teorías que explique fenómenos naturales como el caso de las mareas, Newton sus necesidades no era la guerra, o la pesca o la navegación, sino la de demostrar su teoría de la gravitación universal y consolidar definitivamente la cosmovisión heliocéntrica.

3.2.6 Laplace y su crítica a la teoría de las mareas de Newton

Pierre Simon de La Place (1749-1827), conocido como Laplace, estudió la teoría de las mareas newtonianas escritas por su autor y continuadas por otros geómetras como Daniel Bernoulli y Maclaurin y criticó que dicha teoría haya partido suponiendo un astro inmóvil encima de un planeta inmóvil y recubierto de fluido, en donde buscaron y encontraron la figura que el fluido debe tomar para estar en equilibrio y luego simplemente consideraron que al estar en movimiento el astro en torno al planeta, dicho equilibrio no se alteraba por dicho movimiento y por lo tanto todo el efecto consistía en cambiar en cada instante la posición de ésta figura respecto al planeta de manera que conservará siempre su relación con el astro.

Laplace sostiene que es un error de estos grandes geómetras el haber considerado aparentes los efectos de la rotación terrestre y sostiene que ésta rotación no solo provoca cambios en la distancia entre un punto específico del mar y la Luna y el Sol, sino que además es un efecto real y por lo tanto provoca cambios reales en las mareas. Él mismo reconoce que fueron éstos grandes geómetras los primeros en observar la inexactitud e insuficiencia de sus teorías para explicar ciertos fenómenos en las mareas, sin embargo, no encontraron las causas de dichas limitantes. Laplace afirma que la razón se encuentra en que la rotación terrestre provoca un efecto real en las mareas y no aparente como lo consideraron sus antecesores.

Laplace realiza el cálculo de los efectos que provocaba la rotación terrestre en los océanos, en sus denominadas ecuaciones de mareas de Laplace, sin embargo, no fueron aceptadas, sino hasta 1875 cuando Lord Kelvin demostró que dicho autor tenía razón, sin embargo, muchas enciclopedias y libros no reconocen a Laplace como el autor de dicha teoría sino al francés Gaspard-Gustave Coriolis y dicho efecto lleva su nombre.

3.2.7 Efecto de Coriolis

En 1835 el científico francés Gaspard – Gustave Coriolis describió un efecto o fuerza que actualmente lleva su nombre y que consiste en la aceleración relativa que sufre un objeto que se mueve dentro de un sistema de referencia no inercial en rotación cuando varía su distancia respecto al eje de giro. En el caso de la rotación terrestre en el espacio, dicho efecto tiende a desviar la trayectoria de los objetos que se desplazan sobre la superficie de la Tierra; a la derecha en el hemisferio norte y a la izquierda, en el hemisferio sur. Esta fuerza no sólo aparece durante la rotación de la Tierra sino, en general, para cualquier objeto con masa que se desplaza a una determinada velocidad sobre otro objeto en rotación.

La fuerza de Coriolis tiene un importante papel en los patrones meteorológicos, donde afecta predominantemente a los vientos y al sentido de rotación de las tormentas, así como a la dirección de las corrientes oceánicas. Este efecto debe ser considerado en astronomía y en dinámica estelar, donde afecta a fenómenos tales como el sentido de la rotación de las manchas solares. En las trayectorias de aviones, proyectiles de artillería y misiles también deben considerar el efecto Coriolis, de lo contrario correrán el riesgo de cometer significativos errores.

Como puede verse el efecto de Coriolis no tiene que ver con la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre el planeta Tierra, sino que éste es consecuencia de la rotación del planeta en el espacio, si bien es cierto que afecta a las mareas en los océanos, para los objetivos del presente trabajo se considera un tanto apartado de ellos, por lo que no se profundiza en su análaisis.

3.3. Análisis de las similitudes y diferencias entre las creencias de los campesinos, las teorías agronómicas y las teorías de las mareas.

Como se vio en los temas precedentes, los campesinos entrevistados en el Ejido La Libertad Melchor Ocampo, sobre todo las personas de edad más avanzadas, relacionan el rendimiento y durabilidad de los granos de maíz y frijol cosechados, con el tamaño aparente que la Luna tiene al momento de sembrar el cultivo. Ellos aseguran que el rendimiento es mayor y los granos durarán más tiempo sin agorgojarse si se siembra a partir del cuarto creciente de la Luna hasta tres días antes del novilunio. Sembrar en los demás días del mes lunar, provocará el efecto contrario. En cuanto a la cosecha, ellos consideran que tiene menor importancia tomar en cuenta a la Luna, puesto que el grano ya está formado, aunque consideran que sería mejor cosechar en el período ya especificado.

En cuanto a la durabilidad de la madera, recomiendan cortar el árbol en el mismo período lunar, lo cual le dará mayor durabilidad, aunque ésta característica depende más de la especie del árbol que de la Luna. Si la madera es para aserrarse y convertirla en mueble han observado que se agrieta menos cuando el árbol se derriba en Luna Nueva, aunque el aserrado se realice en otra fase lunar.

En el caso de las teorías agronómicas recomiendan la siembra de granos a partir de la Luna Llena hasta tres días después del cuarto menguante con lo cual aseguran un mayor rendimiento y durabilidad de los granos al almacenarlos. Por lo que hay cierta coincidencia con la creencia de los campesinos melchoreños, ya que el período que ellos recomiendan es un poco más amplio, abarcando desde el cuarto creciente.

En cuanto al corte de madera y que ésta tenga mayor duración, existe una diferencia entre campesinos del ejido Melchor Ocampo y el autor Restrepo, ya que los primeros recomiendan cortarla a partir del cuarto creciente lunar hasta tres días antes del novilunio (luna maciza para ellos), en cambio, Restrepo (2005) recomienda cortarla en Luna Nueva, ya que de acuerdo a su teoría sobre el flujo de la savia en las plantas, él cree que en el novilunio dicha sustancia se concentra en las raíces y por lo tanto el tallo contiene menor cantidad de ella. Por el contrario los campesinos afirman que en Luna Nueva las ramas y árboles vivos que se cortan, derraman mayor cantidad de savia que cuando es luna maciza.

Al comparar las creencias de las gentes del campo del ejido mencionado, que representan las creencias de las gentes del medio rural de la región frailescana del estado de Chiapas y la teoría de Restrepo (2005) del flujo de la savia de los vegetales de acuerdo con las fases lunares, detectamos que ambas no coinciden con las mareas oceánicas, las cuales están comprobadas científicamente y que dependen en gran medida de la variación en la atracción gravitacional que la Luna y el Sol ejercen sobre las aguas de los océanos, a continuación se presenta un análisis más detallado.

Las mareas oceánicas son más altas cuando la atracción gravitacional conjunta de la Luna y el Sol son más fuertes y más bajas cuando son más débiles. Debido al movimiento de rotación de la Tierra, la distancia entre un punto específico de nuestro planeta y su satélite natural varía hasta en dos radios terrestres y el ángulo entre ellos formado varía en 360º en lapso de tiempo de 24 horas y 49 minutos aproximadamente, lo cual provoca que ocurran dos mareas altas y dos mareas bajas en el tiempo mencionado. Por otra parte el movimiento de traslación de la Luna alrededor de la Tierra hace que el ángulo entre la Luna, la Tierra y el Sol varié 360º durante un mes lunar (29.53 diás), lo cual provoca que hayan dos mareas de sicigias y dos bajamares en ese tiempo. Las sicigias ocurren en el novilunio y plenilunio, en cambio las bajamares en los cuartos creciente y menguante.

La teoría del flujo de la savia de las plantas de Restrepo (2005), plantea que ésta se concentra en la copa de los árboles, incluyendo ramas, hojas, flores y frutos cuando se está en la fase de Luna Llena, luego desciende hasta que en el cuarto menguante la savia se concentra más en tallos y ramas, para que al llegar a la fase de Luna Nueva la savia termina de descender y se concentre principalmente en las raíces de los vegetales, una vez pasada la Luna Nueva inicia el ascenso de la savia para que en el cuarto creciente nuevamente se encuentre más concentrada en tallos y ramas, (figura 10, pág. 80). Lo anterior implica que la savia sigue el ritmo de crecimiento o decrecimiento de la parte iluminada de la Luna.

Al comparar la teoría de la savia de las plantas con la teoría de las mareas, se encuentran varias diferencias fundamentales: 1) en el transcurso de 24 horas y 49 minutos aproximadamente, se dan dos mareas altas y dos mareas bajas, lo cual implica que ocurren dos máximos en la atracción gravitacional y dos mínimos en dicho tiempo, situación que la teoría de la savia de las plantas no considera; 2) en las fases de novilunio y plenilunio ocurren las mareas de sicigia que son las más altas del mes lunar, para la teoría de la savia de las plantas asegura que son totalmente distintas, puesto que según ella, la primera concentra la savia en la parte alta de las plantas y la segunda en las raíces; 3) las bajamares ocurren tanto en el cuarto creciente como en el menguante, por lo que las atracciones gravitacionales de la Luna y el Sol, son las más bajas del mes lunar, para Restrepo, en estas fases lunares la savia se concentra en la parte media de las plantas, tallos y yemas, de donde se intuye que estarían en la parte media y no ocupando uno de los extremos como en las mareas; 4) las mareas se deben a la acción conjunta de la Luna y el Sol, en el caso de la teoría de la savia de las plantas solo considera a la Luna.

En el caso de las creencias campesinas sobre que las plantas contienen mayor cantidad de savia en Luna Nueva que en Luna Llena, no coincide con la teoría de las mareas, ya que para éstas en el novilunio y plenilunio las mareas son similares y si éstas tienen influencia sobre la savia, entonces deberían ser muy parecidas y no totalmente opuestas como lo afirman las personas del campo rural.

En conclusión, se puede afirmar que tanto la teoría de la savia de las plantas planteada por Restrepo (2005) y de la cual deriva una serie de recomendaciones para varias labores agrícolas en función de la Luna, así como las creencias campesinas sobre el mismo aspecto, no están basadas en la atracción gravitacional que la Luna y el Sol ejercen sobre nuestro planeta, efecto que está comprobado y que nos lo muestran las mareas oceánicas en todo el mundo.

Capítulo IV

Matematización de la Astronomía y de las mareas oceánicas para predecir el efecto gravitatorio de la Luna y el Sol sobre las plantas.

Aunque existen culturas como la asiática, la mesoamericana, la incaica, etc, que seguramente también usaron la matemática en sus estudios astronómicos, en este capítulo sólo se hace referencia a la cultura occidental a la cual pertenecemos (y donde hay más evidencias documentadas) y que tiene sus raíces en las culturas mesopotámicas, pasando éstas a la griega y de ellos hacia el renacimiento y de ahí hasta nosotros.

En el presente capítulo se destaca el papel que la matemática ha jugado en la astronomía desde los pueblos mesopotámicos, los griegos y en el renacimiento y finalmente se realiza un análisis matemático de los efectos de la Luna y el Sol en las mareas oceánicas, modelando dicho fenómeno, a través de dos perspectivas.

4.1 La matemática en los inicios de la astronomia

La astronomía desde su nacimiento estuvo acompañada de las matemáticas, puesto que ésta le permitió contar los días, las noches y todas las unidades de tiempo que en ella se fueron creando, sin embargo, lo que aquí se destacará es el papel que las matemáticas han venido desempeñando para responderse a las preguntas que el hombre se ha hecho desde los inicios de las civilizaciones, sobre todo el de la cultura occidental a la cual pertenecemos, para ello se enfatizará en los aspectos matemáticos de la cultura mesopotámica y la griega que corresponden a los antecedentes directos de nuestra cultura.

En los inicios de la humanidad, las siguientes preguntas seguramente eran de gran importancia: ¿cuándo iniciará y terminará la época de frío?, ¿cuándo iniciará y terminará la época de lluvias?, ¿cuándo sembrar y cosechar los cultivos?. Esas preguntas por simples que parezcan eran de gran trascendencia para el hombre primitivo. Las respuestas a ellas llegaron a las civilizaciones a través de los calendarios, los cuales como se vio en los antecedentes, nuestros antepasados lo crearon a través de observar y registrar los movimientos aparentes del Sol en el transcurso del tiempo, descubriendo los equinoccios y los solsticios, los cuales determinan las estaciones del año y éstas se relacionan directamente con la época de frío, calor, lluvias, etc. Además descubrieron que muchos fenómenos celestes, como las fases lunares, las constelaciones, las estaciones y los movimientos aparentes del Sol eran periódicos. La matemática y en particular la aritmética jugó un papel trascendental en el registro de dichas observaciones y constituyeron la base de los primeros calendarios empleados por el hombre.

La observación y registro cuidadoso de la bóveda celeste llevó a los astrónomos mesopotámicos a observar otros detalles del cosmos, por ejemplo, los caldeos uno de los pueblos más antiguos desarrollado entre los ríos Tigris y Éufrates, desde unos cuatro milenios antes de Cristo diferenciaron los planetas de las estrellas fijas, haciendo registros a través de tablas matemáticas de la retrogradación de éstos y del aumento o disminución del brillo que presentaban, interpretando dicho comportamiento como un acercamiento o alejamiento que dichos astros guardaban con respecto a la Tierra. A ellos se debe también la división del año en 12 meses, los cuales originalmente correspondian con la aparición de las constelaciones que también en su mayoría se heredaron de ellos, así como la semana en siete días, éstos se relacionaron con el Sol (domingo), la Luna (lunes), Marte (martes), Mercurio (miércoles), Júpiter (jueves), Venus (viernes) y Saturno (sábado), astros que se pueden apreciar a simple vista, el día lo dividieron en 24 horas, las horas en 60 minutos y los minutos en 60 segundos. Otra de sus aportaciones y ésta más relacionada con las matemáticas fue que ellos dividieron a la circunferencia en 360 grados, cada grado en 60 minutos de arco y cada minuto en 60 segundos de arco, dicha división lo hicieron en base a que el año originalmente lo calcularon en 360 días.

La cultura mesopotámica fue bastante conocida por la cultura griega y muchos de los aspectos astronómicos fueron heredados de ésta, como ya se ha mencionado. Una vez que los helénicos iniciaron la racionalización del cosmos, dejaron a un lado las mitologías e iniciaron la búsqueda de explicaciones más racionales del universo, surgiendo así dos corrientes: los pitagóricos y los jónicos, quienes en el fondo trataban de responder a las interrogantes, ¿qué lugar ocupa la Tierra en el universo?, ¿cómo se mueven los cuerpos celestes?, ¿qué es lo que permite a los astros que se muevan alrededor de la Tierra?, ¿porqué caen hacia la Tierra los objetos lanzados hacia arriba?

Los pitagóricos

Pitágoras (ac. 582- ac. 497 a.C.), es considerado el fundador de la denominada escuela pitagórica, en la que sus miembros se dedicaron tanto a actividades político-religiosas, la especulación filosófica y al cultivo de las matemáticas. Este grupo surgió en Crotona a finales del siglo *VI* a.C. Tuvieron gran influencia en el desarrollo del pensamiento griego, tal como lo demuestran las obras de filósofos tan importantes como Platón y Aristóteles, quienes con algunas modificaciones aceptaron el modelo cosmogónico surgido entre los miembros de esa importante comunidad científico-mística.

Pitágoras estudio el sonido y se cree que descubrió que al pulsar una cuerda tensa, los sonidos agradables al oído corresponden exactamente a divisiones de ésta por números enteros, también se le atribuye que identificó las siete notas musicales y que se dio cuenta que mezcladas en un orden numérico producían armonía. Ese tipo de descubrimientos llevó a los pitagóricos a pensar en el número como una entidad mística que debía ser la esencia de todo. Como las relaciones entre el sonido y los números eran tan coherentes, pensaron que no eran exclusivas de la música, y que deberían expresar hechos fundamentales de la naturaleza. De ahí que para entenderla se dedicaran a buscar las diferentes combinaciones existentes entre los números. Por ejemplo, pensaban que podían calcular las órbitas de los cuerpos celestes relacionando sus desplazamientos con intervalos musicales, pues según ellos los movimientos planetarios deberían producir la llamada *música de las esferas,* sonidos sólo audibles para los iniciados en las doctrinas pitagóricas.

La combinación entre investigación científica y misticismo, produjo una cosmovisión muy particular. Según las relaciones numéricas determinadas por los movimientos periódicos de los planetas fijaron las distancias de éstos a la Tierra, basándose en la velocidad con la que los veían moverse. Al principio consideraron que los planetas tenían el siguiente orden: la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter y Saturno, aunque después antepusieron el Sol a Venus y Mercurio. Los pitagóricos consideraron que los planetas debían moverse todos de manera regular en torno a la Tierra, por lo que tenían que seguir la más perfecta de las curvas, que era la circunferencia. De esta manera se introdujo en astronomía el concepto de órbitas circulares, idea que tuvo vigencia por casi 2 000 años.

Parménides (514-450 a.C.), fue uno de los más destacados pitagóricos y también fue el primero en postular que la Tierra era esférica y que estaba inmóvil en el centro del universo. Sin embargo, sus argumentos proporcionados no fueron consecuencia de la observación, medición o exploración, sino de consideraciones geométricas acerca de la simetría. Afirmó que la Tierra, siendo el centro mismo del Universo, necesariamente tendría que ser esférica, pues la esfera, que era la forma perfecta, era la única que podía ocupar ese sitio privilegiado. Siguiendo esa línea de razonamiento aseguró que el Universo en su conjunto tenía la misma forma, abandonando el antiguo concepto de una bóveda celeste hemisférica surgido entre los caldeos. Más exactamente, Parménides creyó en la existencia de un universo finito formado por una serie de capas concéntricas a la Tierra. La más externa era sólida y servía como límite al universo, además de ser el asiento de las estrellas fijas. Según él, el Sol y la Luna fueron formados de la materia "separada de la Vía Láctea", habiéndose formado el primero de una sustancia sutil y caliente, mientras que la segunda lo hizo de una oscura y fría. Parménides consideró que la Vía Láctea era un anillo luminoso que como una guirnalda circundaba a la Tierra, y que se había formado con los vapores provenientes del fuego celeste.

En la misticidad pitagórica, el número 10 era muy especial: se puede obtener de la suma de los primeros cuatro números (10 = 1 + 2 + 3 + 4), se puede formar un triángulo equilátero con diez puntos, cuatro por cada lado. Además estaban convencidos de que éste número tenía que representar el número de cuerpos en movimiento en el universo, de ahí que Filolao (450 – 400 a. C.) postulara que deberían ser 10 cuerpos en movimiento en el universo y como la Tierra, la Luna, Mercurio, Venus, el Sol, Marte, Júpiter, Saturno y la esfera de estrellas fijas solo constituían nueve elementos, Filolao para evitar esta inconsistencia supuso que había otro al que llamó Antictón (anti-Tierra), el cual según él, era un fuego central alrededor del cual giraban la Tierra en 24 horas, la Luna en un mes y el Sol en un año. Como puede verse el movimiento terrestre era de traslación y no de rotación. El fuego central no era visible desde la Tierra precisamente porque se encontraba detrás de ella. Aunque fue una cosmovisión que no tuvo éxito el mérito de este personaje fue haber sido el primero en considerar que la Tierra tenía movimiento y que era un planeta más girando alrededor del fuego central.

Platón y Aristóteles

Dos de los grandes filósofos griegos y que se puede ubicar dentro de la corriente de pensamiento pitagórica son Platón (427 – 347 a. C.) y Aristóteles (384 – 322 a. C). El primero en su filosofía sostiene que la verdad radica en las ideas: entes inmutables y universales. Aseguraba que cualquier cosa que se observa a través de los sentidos no es más que apariencia, ya que existe una realidad básica que sólo puede contemplarse con la mente. Lo que se observa de otra forma no tiene permanencia, siempre es una imitación burda e inadecuada de la esencia real o idea.

Esa concepción de la superioridad intelectual sobre la percepción sensorial tuvo una fuerte influencia negativa sobre el desarrollo de la ciencia, pues según esa concepción la experimentación y la observación no sólo son irrelevantes, sino positivamente engañosas en el examen del conocimiento. Bajo esos supuestos las diferentes teorías sobre el Universo tendrían que ser valoradas no por su poder de explicar o predecir el comportamiento de la naturaleza, sino por ser apropiadas o no para expresar la perfección divina.

Para Platón, la geometría era una ciencia que debería de saber todo hombre culto y lo consideró como un modelo que por su certeza y exactitud de sus métodos constituían un excelente entrenamiento para lograr el pensamiento lógico, igual opinión le tuvo a toda la matemática pura.

Respecto a su cosmología, Platón enseñaba que el *demiurgo* (Dios) había creado el Universo como el más bello, bueno y perfecto de los mundos posibles, haciéndolo a partir de cuatro elementos básicos: fuego, aire, agua y tierra. Ese ser construyó el cosmos de acuerdo con principios geométricos. Así, el Universo era esférico porque la más perfecta de todas las formas es la esfera y puso a la Tierra también esférica e inmóvil en el centro de éste y alrededor de ella giraban los planetas y las estrellas fijas también con un movimiento uniforme. Toda esa uniformidad eran indicadores del principio divino del cosmos.

Aristóteles quien fue discípulo de Platón, al principio tomó la cosmología platónica, pero luego basado un tanto en ella y otra en sus observaciones y sus principios lógicos crea la suya propia. Él se da cuenta que en la superficie terrestre hay todo tipo de movimientos y por lo tanto separa el universo en dos partes, el sublunar y el supralunar, en el primero se permitía la imperfección afirmando que el viento, las lluvias, las descargas eléctricas producidas durante las tempestades, los terremotos, los cometas e incluso la Vía Láctea tenían su origen en la región sublunar, ya que eran eventos de carácter mutables y corruptibles. En cambio la región celeste en donde se hallaban los cuerpos que siempre permanecían iguales a sí mismos, o si mostraban cambios, como los que sucedían con los movimientos planetarios o con las fases de la Luna, sus transformaciones eran cíclicas, repitiéndose indefinidamente. Además de ser eternos, los objetos celestes eran perfectos.

Aristóteles acepta que el mundo está formado por tierra, agua, aíre y fuego y con ello explica el movimiento de los cuerpos en el mundo sublunar. Para él, el movimiento se debe a que cada cuerpo dependiendo de la proporción de material que tenga como dominante buscará su lugar que le corresponde, los que contienen más tierra o agua tenderán a dirigirse a la Tierra, los que tengan más aíre se dirigirán a la capa de éste y los que contengan mayor cantidad de fuego buscarán a la capa esférica más alta que es donde predomina este elemento. De esta manera Aristóteles explicó porque los objetos pesados caen hacia la superficie terrestre más rápido entre más pesados sean y porqué los más livianos ascienden, por ejemplo, una piedra cae más rápido que una pluma porque la piedra es más pesada, pero el humo asciende porque al contener fuego es más liviano y busca su lugar natural. Esta explicación es la que se le denominó movimiento natural.

Al separar el universo en dos regiones se vio obligado a dar una explicación del movimiento en la región supralunar, diciendo que si en ella todo era perfección, entonces tenía que haber una quinta esencia a la que llamó éter y que existían capas esféricas concéntricas totalmente cristalinas y llenas de éter a través de las cuales transitaban la Luna, el Sol, los planetas y la esfera de estrellas fijas, todas animadas por el Primum mobile que se encontraba fuera de la capa de estrellas fijas.

Aristóteles aceptó que la Tierra era esférica y para ello argumentó lo siguiente: cuando un barco se le ve aparecer a lo lejos en el mar, primero se ve la punta del mástil y conforme se acerca se van viendo lo demás de él y las demás partes del barco hasta alcanzar a ver el casco; si nos desplazamos en dirección norte – sur la estrella polar cambia su altura, todo lo anterior solo es posible si la Tierra es esférica; además en los eclipses lunares, la sombra de la Tierra se ve en forma circular. Con esos argumentos éste filósofo demuestra la esfericidad de la Tierra.

En síntesis el modelo cósmico de Aristóteles quedó estructurado de la siguiente forma: en el centro de todo estaba la Tierra, esférica e inmóvil. Alrededor de ella se encontraban las capas esféricas de agua, aire y fuego, después venía la capa esférica de la Luna centrada en la Tierra que dividía el cosmos en dos regiones totalmente diferentes: la terrestre, que era corruptible y cambiante, y la celeste, caracterizada por ser perfecta e inmutable, luego se hallaban las esferas del Sol y de cada uno de los cinco planetas conocidos en ese tiempo, así como la que contenía a las estrellas fijas, todas centradas en la Tierra.

Los jónicos

Esta corriente de pensamiento iniciada por Tales de Mileto (624 – 547 a. C) y conocida como escuela jónica, se diferencia de los griegos antiguos en que busca una explicación racional del universo abandonando la mitología, sin embargo, su cosmología no es producto de la observación o medición de los fenómenos celestes, sino simplemente de la especulación.

Para Tales, el agua era el constituyente fundamental del universo y en base a sus tres estados (sólido, líquido y gaseoso) construyó su cosmología. Para él la Tierra era un disco plano que flotaba sobre el agua y por ello los sismos los explica como movimientos de la tierra provocados por el agua en ebullición de los océanos que rodeaban la tierra firme. El Universo estaba formado por una gran masa líquida encerrada en una enorme esfera de aire, que según él no era otra cosa que vapor de agua. La superficie interna de esa esfera era la bóveda celeste. En su esquema los astros brillaban porque recogían las excreciones terrestres y las inflamaban. Lo mismo sucedía con el Sol, que al inflamar los vapores que ascendían desde la Tierra producía el fuego que lo caracteriza. Mileto sostuvo que los cuerpos celestes flotaban sobre las aguas contenidas en el firmamento, por lo que el movimiento de los astros era consecuencia natural del fluir del agua que formaba el Universo. Estas ideas libraron a su modelo cósmico de los seres sobrenaturales que antes habían sido tan necesarios para explicar el movimiento de los objetos de la esfera celeste

Anaximandro (611 – 545 a. C.) fue uno de los seguidores de Tales y en su cosmología consideró que el cielo se encontraba conformado por una sustancia que llamó apeirón, la que consideró diferente del agua y de cualquier otra sustancia terrestre y que en el centro del universo se encontraba la Tierra, la cual según él tenía una forma cilíndrica, siendo tres veces más grande la altura que su diámetro y que solo era habitable el círculo superior. Una de sus principales aportaciones fue considerar que la Tierra no se encontraba sostenida por ningún objeto, ya que al estar exactamente en el centro del universo no necesitaba del sostén alguno.

Anaxágoras (499 – 429 a. C.) fue otro jónico que descubrió que la Luna no tenía luz propia, sino que brillaba por la luz que reflejaba del Sol y con ello dio una explicación correcta de los eclipses lunares y solares, así como de las fases de la Luna.

Enseñaba que el universo se originó con la formación de un torbellino dentro de una mezcla de material uniforme y sin movimiento, donde todas las cosas estaban juntas. El movimiento rotatorio de ese torbellino comenzó en algún punto de la materia amorfa, extendiéndose gradualmente. Girando en círculos cada vez mayores ocasionó una separación del material primigenio en dos grandes masas. Una de ellas tenía consistencia tenue, ligera, caliente y seca, mientras que la otra resultó ser densa, pesada, oscura, fría y húmeda. A la primera la llamó el éter y a la segunda el aire.

Por sus características el éter ocupó los espacios exteriores del mundo, mientras que el aire se concentró en la parte interna. Separaciones sucesivas de este último elemento sirvieron para formar las nubes, el agua, la tierra y las rocas. Como resultado del movimiento circular del torbellino, los elementos más pesados se reunieron en el centro y formaron la Tierra, la que por el mecanismo mismo que le dio origen ocupó el centro del Universo.

Para Anaxágoras la Tierra era plana y se mantenía suspendida en su lugar privilegiado debido a que el aire le proporcionaba el soporte suficiente. El Sol era una piedra de fuego del mismo tipo que las estrellas, sólo que éstas se encontraban a distancias mayores, razón por la cual no calentaban igual que nuestro astro. La Luna tenía naturaleza terrosa y sólo brillaba por la luz solar que reflejaba. Este pensador consideró que la Vía Láctea se formaba por la proyección de la sombra terrestre sobre el cielo estrellado, lo cual sucedía cuando el Sol pasaba por debajo de nuestro planeta durante la noche. Según él, las estrellas que se encontraban en la región de la Vía Láctea no eran oscurecidas, pues como tenían luz propia, podían brillar. También aseguraba que el movimiento del Sol, la Luna y las estrellas en torno de la Tierra se debía al movimiento del éter.

Como se puede apreciar, tanto los pitagóricos como los jónicos estaban tratando de responderse a las preguntas planteadas al principio del subcapítulo y sus respuestas fueron, que tanto la Tierra como el hombre se encontraban en el centro del universo, pero ¿por qué?, seguramente porque ellos creían que lo más importante del universo era el mundo y por ello especulaban que tenía que ocupar el lugar principal y con ello también el hombre, el cual las diversas religiones le han asignado el lugar más importante entre los animales y en el cosmos. Además los pitagóricos relacionaron los aspectos divinos con los geométricos y tuvieron como resultado una cosmovisión que ponía acorde las ideas religiosas de perfección con los movimientos circulares uniformes de los cuerpos celestes. Por lo anterior podemos decir que la matemática y en particular la geometría permitió representar el modelo cosmológico de ésa época. A continuación veremos algunos ejemplos de la aplicación de la geometría a la astronomía.

Las primeras aplicaciones geométricas a la astronomía

Uno de los primeros matemáticos que intentó describir el movimiento de los planetas a través de un modelo geométrico basado en el movimiento circular uniforme fue el pitagórico Eudoxio de Cnido (ca. 400 – 347 a. C). Este matemático sabía que los planetas algunas veces se encuentran más alejados de la Tierra y otras más cercas, que se mueven en una pequeña franja del cielo llamada eclíptica con dirección Este en forma irregular, ya que además de tener velocidades variables algunas veces se detienen, incluso retroceden zigzagueando. Tomando esos hechos, Eudoxio desarrolló un modelo geométrico en el que combinando solamente movimientos circulares y uniformes representó las trayectorias seguidas por los planetas, dicho modelo fue llamado homocéntrico por considerar que los cuerpos celestes se movían alrededor de la Tierra quien la consideraba fija e inmóvil a través de esferas centradas en la Tierra, geométricamente lo representó como lo muestra la figura 20.

Eudoxio explica que cada planeta se encontraba sujeto al ecuador de la esfera *A* de dicha figura, la cual giraba uniformemente en torno a un eje a. Esta a su vez era arrastrada por otra esfera *B* mayor, pero concéntrica a la primera, aunque el eje de giro *b* de la segunda era diferente. Ambas giraban con velocidad distinta. El eje de giro de *B* también difería del que tenía *C*, que las contenía y que igualmente giraba con velocidad y dirección *c* diferente de las de *A* y *B*. Finalmente había una cuarta esfera *D* que envolvía a las tres anteriores y cuyo eje de giro *d* también estaba orientado en una dirección distinta. El Sol, la Luna y los cinco planetas giraban de esa forma, lo que daba como resultado un esquema geométrico muy complicado, pero en el que solamente era necesario ajustar adecuadamente las distintas velocidades de giro y las orientaciones de los diversos ejes para representar todos los movimientos planetarios. Para que el modelo se ajustara a lo observado, Eudoxio introdujo 27 esferas homocéntricas diferentes: tres para el Sol, tres para la Luna y cuatro para cada uno de los cinco planetas, además de la de las estrellas fijas (Moreno, M. 1997).

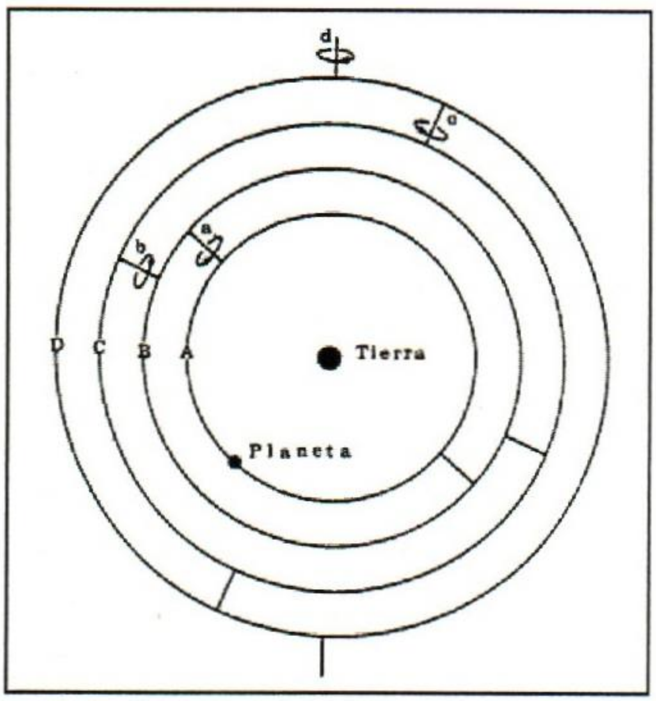


Figura 20. Esquema que representa el movimiento de los planetas en el modelo de las esferas homocéntricas de Eudoxio. Fuente: Moreno, 1997, p. 32

El modelo homocéntrico resultó ser mucho más predictivo que las tablas de los caldeos, sobre todo para Mercurio, Júpiter y Saturno, regulares para Venus y francamente malo para Marte, sin embargo el modelo tuvo el mérito de pasar de la especulación filosófica al de la representación matemática del movimiento de los cuerpos celestes del universo y a partir de éste, otros griegos como Aristóteles lo adoptaron y le agregaron más esferas y trataron de explicar el movimiento celeste a través de la teoría homocéntrica.

Al tratar de explicar el movimiento de los planetas y sobre todo predecirlos, otros personajes también propusieron algunos modelos geométricos, uno de ellos fue Heráclides del Ponto (ca. 390 – 339 a. C.), quien propuso un modelo geométrico híbrido, en donde ubicó a la Tierra en el centro del universo con movimiento rotacional cada 24 horas, constituyéndose en el primer modelo que acertaba en explicar adecuadamente el movimiento aparente de todos los cuerpos celestes, sin embargo, al tratar de representar los movimientos de Mercurio y Venus que se sabía para ese tiempo que se movían más cercas del Sol, éstos los consideró girando alrededor de dicho astro y éste girando alrededor de la Tierra. Dicho modelo no tuvo aceptación en los griegos de ese tiempo y prácticamente pasó al olvido, sin embargo, para nuestro caso es importante mencionarlo, puesto que permite ver como los pensadores de esa época estaban tratando de encontrar respuesta a preguntas como la siguiente, ¿cómo se mueven los planetas?, y cómo a través de un paradigma de perfección celestial buscaban respuestas que estuviesen acordes a ella.

Otro matemático griego que trató de explicar el movimiento irregular de los planetas bajo el paradigma de perfección representado por movimiento circular uniforme fue Apolonio de Perga (ca. 247 – 205 a. C.), para ello ideo la teoría de los epiciclos, que consiste en suponer que los planetas presentan dos movimiento circulares uniformes al mismo tiempo: uno, el planeta gira en una circunferencia chica (epiciclo), cuyo centro se ubica sobre una circunferencia mayor (deferente); y dos, el epiciclo se desplaza centrado en el deferente, el cual tiene su centro en la Tierra, como se muestra en la figura 21.

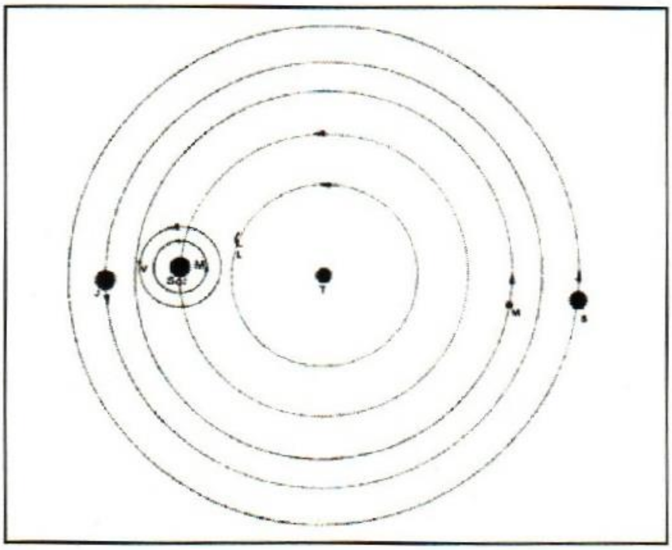


Figura 21. Representación del modelo geométrico de Heráclides. Fuente: Moreno, 1997, p. 33

En la figura 22 se puede ver que cuando un planeta se desplaza a lo largo del segmento *bcd,* el epicicloide avanza sin interrupción y se dice que tiene movimiento directo, pero al llegar al punto *d* parece detenerse y quedar estacionario. Al moverse a lo largo del trayecto se va en dirección contraria a la original, razón por la cual un observador mirará que retrocede. Al llegar al punto *e* nuevamente queda estacionario, volviendo a avanzar cuando recorre el segmento *ef* de su trayectoria.

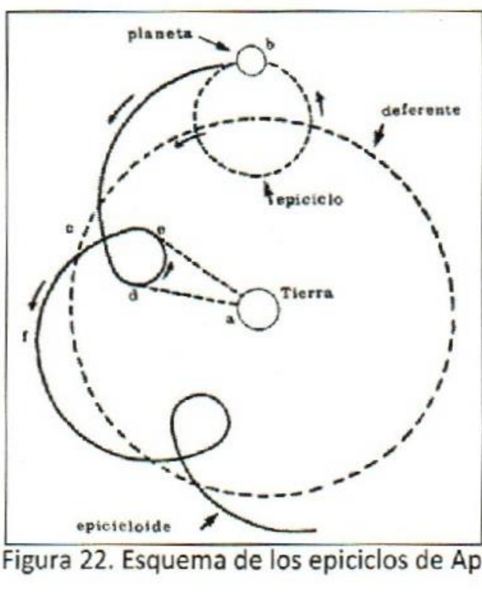


Figura 22. Esquema de los epiciclos de Apolonio. Fuente: Moreno, 1997, p. 41

La teoría de epiciclos de Apolonio lo popularizó cuatro siglos más tarde Tolomeo y fue la forma de explicar el movimiento de los planetas por la teoría geocéntrica y que perduró hasta el siglo XVII.

Los matemáticos griegos no se quedaron solo en la representación geométrica del universo, sino que se plantearon otras preguntas como ¿qué distancia hay entre la Tierra y la Luna o entre la Tierra y el Sol?, ¿qué tamaño tiene la Tierra?, ¿qué dimensiones tiene el universo?, entre otras, lo cual los llevó a aplicar sus conocimientos geométricos y trigonométricos a la astronomía y a desarrollar procedimientos realmente ingeniosos, a continuación se exponen algunos de ellos.

Aristiarco de Samos (310 – 230 a. C.), en su libro *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna,* nos dejó el procedimiento que utilizó para calcular las proporciones que guardan las distancias entre la Tierra, la Luna y el Sol. Para ello consideró el momento cuando los rayos solares iluminan justamente la mitad del disco lunar, en ese instante la configuración que tiene el sistema Tierra-Luna-Sol es la de un triángulo rectángulo (figura 23). Por la condición de cuadratura el ángulo β es exactamente igual a 90°. Midiendo el ángulo α, Aristarco pudo determinar que la relación existente entre las distancias Luna-Sol y Luna-Tierra era de alrededor de 20. En la Proposición 7 de su libro afirmó que "la distancia al Sol desde la Tierra es mayor que 18 y menor que 20 veces la de la Luna a la Tierra" (Moreno, M. 1997, pág. 35). El método por él utilizado para llegar a esos resultados se presenta a continuación.

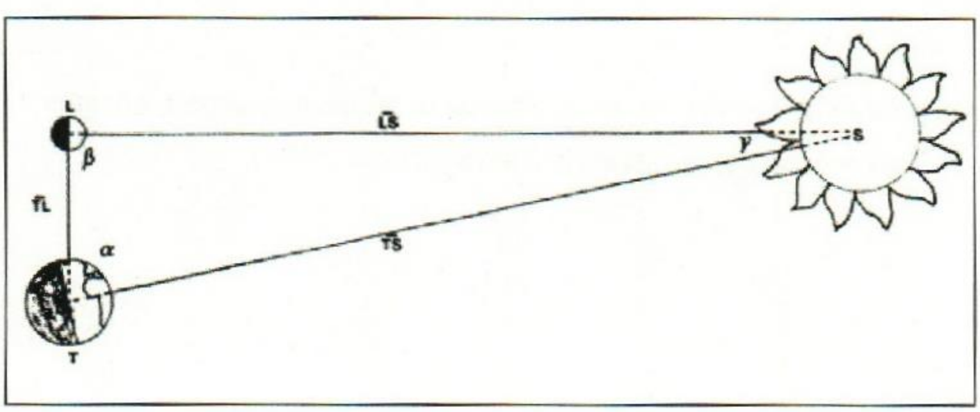


Figura 23. Triángulo rectángulo mediante el que Aristarco trató de determinar la distancia al Sol. Fuente: Moreno, 1997, p. 35

De acuerdo con la figura 23, T representa a la Tierra, L a la Luna, S al Sol, β el ángulo de 90°, α el ángulo que Aristiarco midió en la Tierra, γ el ángulo en el Sol, $\overline{TL}$ la distancia de la Tierra a la Luna, $\overline{LS}$ la distancia de la Luna al Sol y $\overline{TS}$ la distancia de la Tierra al Sol.

Con dicha información y aplicando los procedimientos actuales de geometría y trigonometría, que en esencia fue el procedimiento que Aristiarco siguió para calcular las proporciones que guardan las distancia entre la Tierra y la Luna y entre la Tierra y el Sol, se puede resumir de la siguiente manera:

Primero, midió el ángulo α, reportando que éste media 87.1°, por lo que aplicando la relación trigonométrica que dice que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180°, calculó el ángulo γ de la siguiente manera:

$\beta + \alpha + \gamma = 180°$

$\gamma = 180° - \beta - \alpha$

$\gamma = 180° - 90° - 87.1°$

$\gamma = 2.9°$

Una vez que se tienen los tres ángulos del triángulo rectángulo, se aplica la ley de los senos que se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\overline{TS}}{sen\beta} = \frac{\overline{TL}}{sen\gamma} = \frac{\overline{LS}}{sen\alpha}$$

Como se conocen todos los ángulos, se puede tomar la primera igualdad, sustituir sus valores respectivos y despejar la distancia Tierra – Sol.

$$\frac{\overline{TS}}{sen\beta} = \frac{\overline{TL}}{sen\gamma}$$

$$\overline{TS} = \frac{sen\beta}{sen\gamma}\overline{TL}$$

$$\overline{TS} = \frac{sen(90°)}{sen(2.9°)}\overline{TL}$$

$$\overline{TS} = \frac{1}{0.0506}\overline{TL}$$

$$\overline{TS} \approx 20\overline{TL}$$

Por lo que Aristiarco pudo concluir que la distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente 20 veces la distancia que existe entre la Tierra y la Luna. Cabe destacar que el procedimiento matemático empleado por Aristiarco es totalmente correcto, el no haber calculado el valor real se debe a dos razones: una, es muy difícil determinar el momento exacto en que el Sol, la Luna y la Tierra estén en perfecta cuadratura, y dos, los instrumentos de medición de aquella época eran bastante imprecisos, sobre todo cuando se trataba de fracciones de grado. Sin embargo, constituye el primer intento de darle dimensiones reales al universo y a partir de él se iniciará todo un esfuerzo por hacer tangibles las distancias que no se podían medir directamente y la trigonometría fue pieza fundamental en dicha actividad astronómica.

En el libro mencionado, Aristiarco realiza toda una discusión para calcular la distancia que separa a la Tierra de la Luna, llegándola a expresar en términos del radio terrestre, al respecto se comenta la forma de lograrlo.

Primero trató de encontrar la proporción que guardan el diámetro de la Tierra y el de la Luna, para ello se basó en los eclipses lunares bajo el siguiente supuesto: la sombra que proyecta la Tierra dado la lejanía del Sol se puede considerar como un cilindro en lugar del cono que realmente es, por lo que midiendo el tiempo en que tarda la Luna en atravesar la sombra proyectada por la Tierra en un eclipse de Luna total, encontró que el diámetro de la Luna era aproximadamente un tercio del de la Tierra.

Segundo, por experiencia se conocía desde esa época, que un círculo que se alejaba de un observador 57 veces la longitud de su diámetro, presentaría un diámetro angular de un grado, independientemente del tamaño del círculo.

Estos conocimientos los uso Aristiarco para estimar la distancia que separa la Tierra de la Luna, ya que ésta, vista desde la Tierra presenta un diámetro angular algo superior a medio grado, lo que implica que la Luna se encuentra separada cercas del doble de 57 veces el diámetro de la Luna. Combinando ese resultado con la proporción del diámetro de la Luna respecto al de la Tierra, Aristiarco calculó que la distancia de la Tierra a la Luna era aproximadamente igual a 70 radios terrestres.

Si bien Aristiarco logró calcular la distancia de la Tierra a la Luna en términos del radio terrestre, éste no podía usarse en forma práctica debido a que en ese tiempo se desconocía las dimensiones de la Tierra.

Eratóstenes (273 – 192 a. C.) fue el primero que usando sus conocimientos geométricos y trigonométricos estimó las dimensiones de la Tierra y con ello el radio de ésta, el procedimiento por él empleado se describe a continuación.

Eratóstenes se dio cuenta que el Sol se hallaba tan alejado de la Tierra que sus rayos llegan a ésta prácticamente paralelos. Por esta propiedad, cuando inciden sobre diferentes partes de la superficie esférica de nuestro planeta, el ángulo formado con la vertical del lugar de incidencia aumenta conforme el sitio considerado se encuentre más alejado del ecuador.

Eratóstenes, nativo de Siena, sabía que un poste o un obelisco sembrado verticalmente en dicha ciudad, al medio día, no producía sombra alguna en el solsticio de verano (22 de junio), dado que dicha ciudad se encuentra casi en el trópico de cáncer, en cambio en Alejandría que se ubica prácticamente en el mismo meridiano que Siena pero más al norte, ciudad en la que él vivía, en ese mismo día y a la misma hora, un objeto como el descrito, producía una sombra.

Para determinar el radio de la Tierra, Eratóstenes realizó el siguiente experimento. Sembró un poste verticalmente en Alejandría y el 22 de junio al medio día midió los lados del triángulo rectángulo formado por el obelisco y la sombra, luego determinó que el ángulo de incidencia de los rayos solares era de 07°12' y midió con sus pasos la distancia lineal que había entre Siena y Alejandría, encontrando que ésta era de 5000 estadios. Por geometría se dio cuenta que ese ángulo era el mismo que el que se formaba entre el centro de la Tierra y ambas poblaciones (figura 24), por lo que empleando el procedimiento que se describe a continuación logró determinar las dimensiones del radio terrestre.

Partiendo de que la Tierra es una esfera, este autor lo representó en dos dimensiones a través de una circunferencia, para calcular que parte de la longitud de la circunferencia representaba la distancia entre Siena y Alejandría (SA), Eratóstenes dividió los 7°12' obtenidos entre los 360° de la circunferencia, obteniendo que ésta era una cincuentava parte de ella, por lo que al multiplicar 5000 estadios por 50 obtendría la longitud de la circunferencia.

$$\frac{7^{\circ}12'}{360^{\circ}} = \frac{1}{50}$$

Longitud de la circunferencia (L_c) = 50(5000) = 250 000 estadios

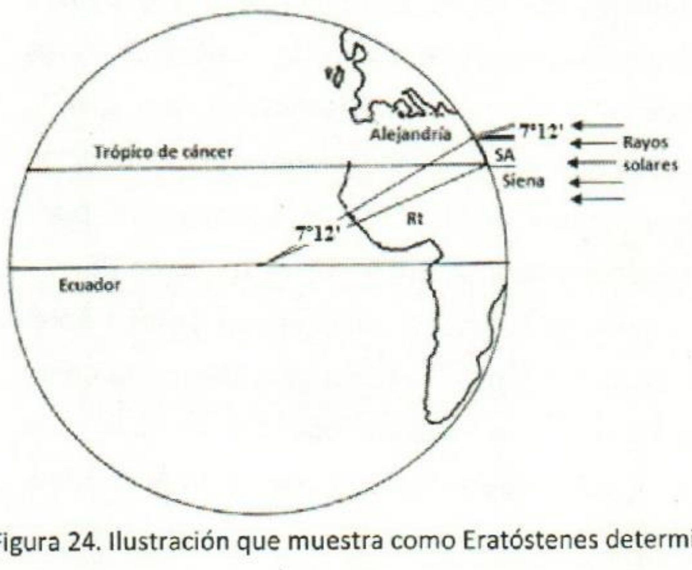


Figura 24. Ilustración que muestra como Eratóstenes determinó el radio terrestre (Rt)

Una vez calculado la longitud de la circunferencia, Eratóstenes que sabía la relación que ésta guarda con el radio, lo despejó de dicha fórmula y obtuvo su valor correspondiente.

$$L_c = 2\pi R_t$$

$$R_t = \frac{L_c}{2\pi} = \frac{250000}{2(3.1416)} = 39788 \text{ estadios}$$

Como un estadio se estima en 157 metros, al multiplicar los 39 788 estadios por los 157 metros se obtiene

Rt = 39 788 (157)= 6 247 km

Valor que es muy próximo al que actualmente se ha calculado empleando toda la tecnología al alcance, y que es de 6 370 km.

Con el cálculo de Eratóstenes, combinado con los de Aristiarco, el universo empezó a revelar sus dimensiones.

Hiparco (161-127 a.C.) fue un observador muy cuidadoso de los cielos y a pesar de las limitaciones de los instrumentos de observación con los que contaba logró algunas aportaciones que hoy nos sorprenden, por ejemplo, al comparar las mediciones de las coordenadas estelares con la de sus antepasados griegos y caldeos, descubrió que habían ocurrido cambios notables en las posiciones de las estrellas que no podían ser atribuidos a errores de observación, así que lo interpretó como reflejo de un cambio real en la dirección del eje de rotación terrestre. Fenómeno conocido ahora como *precesión de los equinoccios,* pues ocasiona un adelanto anual de 50 segundos de arco por año, por lo que en 25 920 años da una vuelta completa. A través de la observación de un eclipse solar ocurrido en el año 190 a.C., hecha en forma simultánea tanto en Alejandría como en Hellesponto, logró determinar que la distancia a la Luna era 60.5 veces el radio terrestre, valor que prácticamente es igual al que se ha obtenido en la actualidad.

Por otra parte, al estudiar otros eclipses, tanto solares como lunares, estableció que el Sol era un cuerpo que distaba de nosotros 2 500 radios terrestres, y aunque esta determinación fue mejor que la de Aristarco, en realidad todavía era unas diez veces menor al valor correcto. A pesar de ello el cálculo de Hiparco volvió a ampliar considerablemente las dimensiones del Universo.

Tolomeo

Claudio Tolomeo (ca. 90 – 168) logró realizar una gran síntesis de toda la cultura griega, en el caso de la astronomía escribió su libro *Megale Syntaxis Mathematica* (El tratado de matemáticas), más conocido como el Almagesto. En él desarrolló en forma muy completa, y con el rigor matemático que caracterizó a los pensadores griegos, diversos temas astronómicos, entre los que destacan sus estudios sobre la forma y el lugar ocupado por la Tierra en el Universo, así como la distribución que los demás cuerpos celestes tienen en él.

En cuanto al lugar que ocupa la Tierra en el espacio, concluye que ésta era el centro mismo del universo, del cual, en cuanto a dimensiones era solo un punto con respecto a la esfera de estrellas fijas, que todos los cuerpos celestes desde la Luna, el Sol, los planetas y las estrellas fijas giraban alrededor de ella, porque ésta era el centro mismo del universo, fortaleciendo y difundiendo la teoría geocéntrica. A lo largo de sus trece capítulos del Almagesto, Tolomeo realiza diversas aplicaciones geométricas y trigonométricas para demostrar sus afirmaciones al estilo que acostumbraban los griegos, lo cual hizo que su obra fuera considerada por la cultura occidental como un dogma y cuando eran cuestionados apelaban a la autoridad de Tolomeo. Como síntesis de su cosmovisión, la figura 25 nos expresa de manera geométrica el esquema tolemaico como se le llamó.

Al igual que los antiguos griegos, para Tolomeo, los cuerpos celestes giraban alrededor de la Tierra a través de esferas cristalinas, la cual les permitía seguir siempre la misma ruta. Este autor aceptó la teoría de Apolonio sobre los epiciclos para explicar el movimiento errante de los planetas,. Tolomeo fue muy práctico, aceptó todo aquello que le era útil, sin preguntarse el porqué, sino simplemente que explicaran el fenómeno o que permitieran predecirlo.

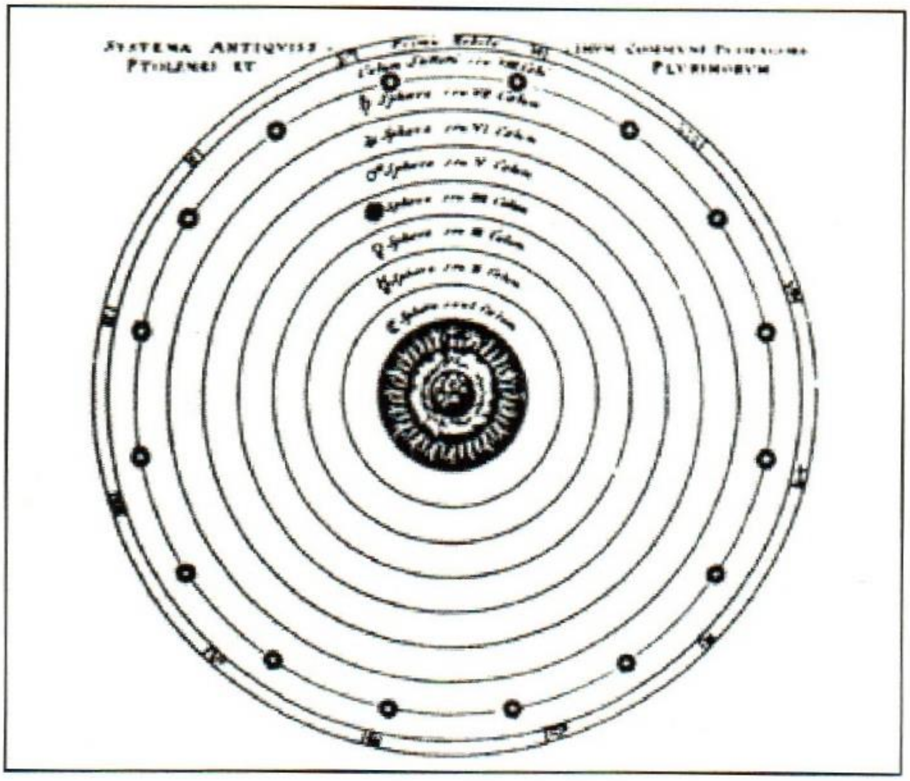


Figura 25. Planetario de Tolomeo. Fuente: Marco 1997, p. 40

La edad media

Cuando el imperio romano sustituyó a Grecia como la potencia del mediterráneo, las matemáticas y en general la ciencia se detuvo, ya que Roma no le interesó el desarrollo de las ciencias y en cuanto a las matemáticas solo usaban la que les permitía administrar su vasto imperio. En el siglo IV el emperador Constantino se convirtió al cristianismo y a partir de allí la Iglesia católica se convirtió en la única fuerza política y espiritual del mundo occidental, con lo cual el rechazo hacia el conocimiento científico fue todavía mayor.

La edad media (500 – 1450 d. C), se caracterizó por un oscurantismo para la ciencia y una esterilidad en la producción de conocimientos científicos. El hombre culto de esa época tuvo como cosmovisión lo que el génesis de la Biblia expresa. Incluso éste período podemos considerarlo como de retroceso, ya que hasta los conocimientos griegos se desaparecieron en la baja edad media y solo a partir del siglo XIII es que volvieron a reaparecer y a partir de allí se vuelven a discutir y surgen figuras como Buridan y Nicolas de Oresme, quienes expresan sus desacuerdos con algunos aspectos del aristotelismo, sin embargo, a pesar de que éstos autores contribuyen fuertemente para que surja el renacimiento, se someten a los actos de fe, es decir, cuando encontraban aspectos que no podían explicarse se sometían a lo que la Biblia expresaba.

4.2 El heliocentrismo.

Los viajes interoceánicos realizados en 1492 por Cristobal Colón y en 1519 por Fernando de Magallanes, provocaron en la comunidad astronómica de aquella época grandes interrogantes, como por ejemplo, el tamaño de la Tierra, el cual se había considerado menor, las constelaciones sólo vistas en el hemisferio austral que eran totalmente desconocidas, así como estrellas de dicho hemisferio. Estos acontecimientos aunados al invento de la imprenta de tipos móviles, incentivaron a los hombres de ciencia de aquella época a traducir al latín todas aquellas obras, sobre toda las griegas y retomar las lecturas de éstas y proponer teorías que permitieran explicar correctamente los nuevos descubrimientos y responder las necesidades que la navegación tenía sobre las nuevas ubicaciones geográficas.

Nicolás Copérnico

Debido al uso náutico, geográfico y astrológico, a inicios del siglo XVI, la astronomía era la única ciencia que habia acumulado gran cantidad de datos y éstos aunados con los nuevos y más precisos métodos matemáticos, empezó a demostrar que cuando se intentaba determinar posiciones planetarias con exactitud, el modelo geocéntrico presentaba serias deficiencias, de ahí que surgieran autores como Peurbach y Johannes Müller, quienes realizaron esfuerzos importantes para mejorar las viejas tablas astronómicas construidas durante el siglo XIII, y aunque lograron adecuarlas parcialmente a las nuevas observaciones, no resolvieron el problema de su falta de precisión.

En 1473 apareció la obra más conocida de Peurbach, *Novae Theoricae Planetarum* (Nuevas teorías planetarias) en la que dicho autor exponía por primera vez en la edad media la teoría de los epiciclos tomada del Almagesto, en la que además agregaba datos astronómicos posteriores a dicha obra. En 1496 apareció en Venecia la publicación de Johannes Müller titulada *Epitome in Almagestum*, que más que un compendio de dicha obra, agregaba buena cantidad de datos astronómicos más recientes y exponía sus diferencias con la obra de Tolomeo, sobre todo en lo que respecta a la teoría de la Luna, lo cual contribuyó a desmitificarla.

Nicolás Copérnico (1473 – 1543), astrónomo polaco, leyó las obras de Peurbach, Müller y seguramente las Oresme y Aristiarco y dio el gran paso para renovar la astronomía al postular la teoría heliocéntrica para explicar el cosmos, en su mayor obra De Revolutionibus Orbiun Coelestiun (Sobre las Revoluciones de la Esferas Celestes), escrita a lo largo de 1507 a 1532 y publicada por Andreas Osiander en 1543, pocos días antes de su muerte, deja desarrollada la concepción que él tenía del movimiento de los cuerpos celestes.

Las ideas principales de la obra de Copérnico, son la de preservar la unidad de movimientos y crear un sistema de círculos más racional. El heliocentrismo no es la premisa sino la conclusión a la que él llega. Cambia la hipótesis geocéntrica y postula que el Sol permanece quieto en las proximidades del centro del universo y la Tierra se mueve de tres maneras diferentes: movimiento de rotación, de traslación y de declinación. El movimiento de rotación terrestre le permitió explicar correctamente el día y la noche, así como el movimiento aparente de todos los astros celestes, explicó y argumentó matemáticamente como bastaba dicho movimiento para explicar el comportamiento de los cielos. El movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol y el de los demás planetas, le permitió explicar el movimiento directo, estacionario y retrógrado de los errantes de una manera más sencilla que la teoría de los epiciclos y con una mayor precisión, con solo 27 esferas él pudo explicar todos estos movimientos en tanto que la teoría de los epiciclos ocupaba al menos 79 de ellas. El movimiento de declinación, es decir, el de la inclinación del eje de rotación terrestre le permitió explicar correctamente los solsticios y los equinoccios y con ello las estaciones del año.

Las premisas fundamentales de la teoría heliocéntrica son: la Tierra es un globo incluido en ella las aguas de los océanos, es un planeta más del Sol y orbita alrededor de él con un período igual a un año, el Sol es el que se encuentra en las proximidades del centro del universo, los planetas entre más cercanos al Sol se encuentran, sus períodos de traslación alrededor de éste son menores, la Luna no es un planeta sino un satélite de la Tierra y orbita alrededor de ella con un período de un mes. Además, Copérnico plantea dos hipótesis más: una, no existe un centro único de todas las esferas celestes, dos, que el centro de la Tierra no es el centro del universo, sino el centro lunar y el centro de gravedad. Geométricamente su modelo heliocéntrico se presenta en la figura 26.

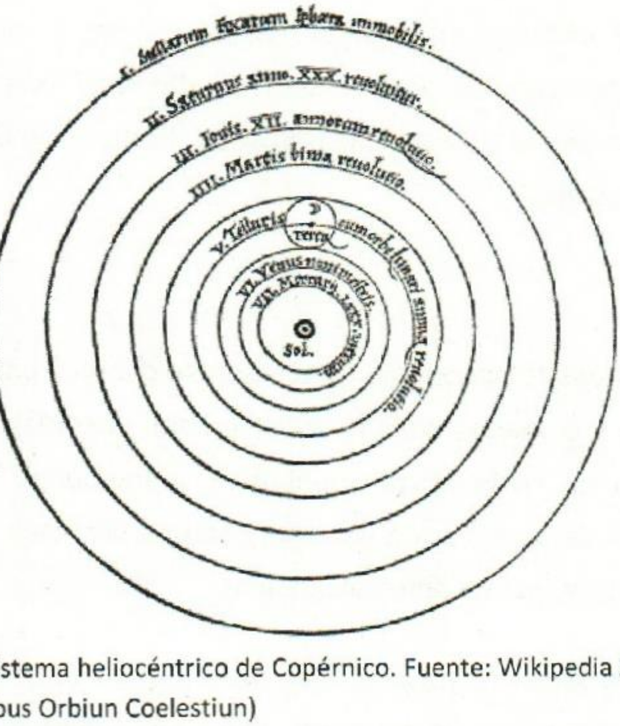


Figura 26. Sistema heliocéntrico de Copérnico. Fuente: Wikipedia 2007 (tomado del original de Revolutionibus Orbiun Coelestiun)

Para determinar el orden de los planetas, Copérnico se basó en el tiempo terrestre que éstos les lleva en darle una vuelta al Sol, así ubicó en las proximidades del Sol a Mercurio, quien le lleva alrededor de 80 días completar un período, luego Venus quien tarda alrededor de siete meses, posteriormente la Tierra que tarda un año en completar una vuelta, luego Marte quien tarda alrededor de dos años, posteriormente Júpiter que le lleva alrededor de 12 años y finalmente Saturno que tarda cercas de 30 años en completar un ciclo alrededor del Sol. Si observamos la figura 24, la última esfera dice *stellarum fixarum sphaera imovilis* (esfera inmóvil de las estrellas fijas), si bien Copérnico siguió considerando una estructura de esferas, es muy importante resaltar que él consideró inmóvil dicha esfera, ya que su movimiento aparente se debe al movimiento de rotación de nuestro planeta.

Si bien Copérnico no pudo escapar totalmente de las antiguas concepciones aristotélicas, como las del movimiento circular uniforme de los planetas, el que éstos se desplazaran a través de esferas cristalinas y el que las leyes que regían los cielos eran distintas que las que regían en la Tierra, él dio un gran paso al demostrar que el heliocentrismo era mucho más racional que el geocentrismo y sobre todo que su modelo cosmológico no era producto de la especulación, sino resultado de sus observaciones y cálculos matemáticos desarrollados durante muchos años. Sin embargo, su modelo cosmológico no fue aceptado rápidamente, sino después de muchos años y de largas y hasta encarnizadas discusiones con instituciones clérigas como la inquisición.

Tycho Brahe

Tycho Brahe (1546 – 1601) fue un notable astrónomo danés que se destacó por la precisión de sus observaciones y por haber construido el primer observatorio astronómico profesional en la isla de Hven al que denominó Uraninburgo, en donde diseñó e instaló instrumentos de observación espacial con una precisión de hasta cinco segundos de arco, precisión nunca antes alcanzada.

Tres fueron los eventos astronómicos que Tycho le tocó vivir y que influyeron fuertemente en su vida como astrónomo y en su concepción del universo: la conjunción de Júpiter y Saturno ocurrida el 24 de agosto de 1563 y que los astrónomos de su tiempo habían pronosticado con errores que iban desde días hasta meses de diferencia, lo que motivó a que él se dedicarse a la astronomía y propusiera homogeneizar los criterios; la aparición de una supernova a la que denominó nova en noviembre de 1572, la cual es sus meses más deslumbrantes fue más brillante que Júpiter y se podía ver inclusive de día; y la aparición en 1577 de un cometa de una cola enorme visto en las madrugadas.

La supernova de 1572 fue observada por muchos astrónomos, pero Tycho fue el que realizó los mejores registros y midió la distancia que ésta tenía de la Tierra, concluyendo que se ubicaba en la esfera de estrellas fijas, lo cual contradecía la ortodoxia aristotélica, ya que ésta postulaba que en el espacio supralunar todo era serenidad e inmutabilidad, lo que lo llevó a criticar dicha posición.

El Cometa de 1577 fue ampliamente observado por Tycho y midió su distancia y la trayectoria que éste seguía, concluyendo que dicho cuerpo celeste se ubicaba más allá de la Luna y su trayectoria atravesaba las supuestas esferas cristalinas y sólidas de los planetas que según los aristotélicos daban soporte al mundo, esto contradecía dos aspectos de la teoría geocéntrica: una, que los cometas estaban a distancias inferiores a la Luna, y dos, que los planetas orbitaban a través de esferas cristalinas y sólidas, puesto que si el cometa los atravesaba, entonces no habían tales esferas, de lo contrario los rompería en miles de pedazos. Esto lo llevó a Tycho a estar en contra de los aristotélicos.

Pero Brahe, tampoco fue copernicano, la razón fue que él que se consideraba el mejor astrónomo de su tiempo y sus aparatos astronómicos los más precisos, midió el paralaje de las estrellas fijas y encontró una ausencia total de éste, razón suficiente para considerar a la Tierra fija e inmóvil al centro del universo. Sin embargo, tampoco estaba de acuerdo con la teoría aristotélica por las razones ya expuestas, hecho que lo llevó a construir un modelo híbrido similar al de Heráclides del Ponto que lo propuso más de un milenio anterior a Brahe, como lo muestra la figura 27.

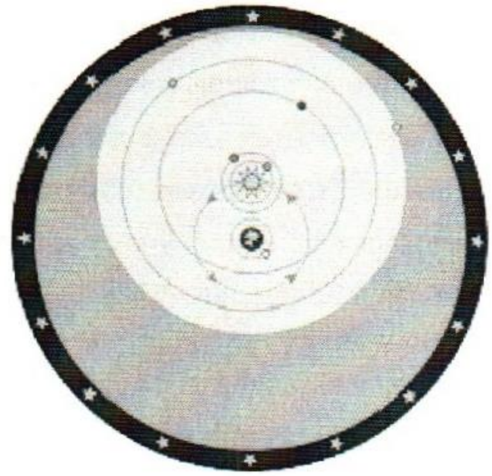


Figura 27. Sistema del universo de Tycho Brahe. Fuente: Moreno, 1997, p. 68

En dicha figura se puede observar como Brahe no le importa que la órbita del Sol se intercepte con la de Mercurio, o la de Marte con la del Sol, puesto que para él las esferas sólidas y cristalinas que suponían los aristotélicos no existían.

Galileo Galilei

Galileo Galilei nació en Pisa Italia en 1564 y falleció en Florencia del mismo país en 1642, es considerado uno de los grandes científicos del renacimiento por sus aportaciones a la ciencia y sobre todo por su metodología científica utilizada, - la experimentación y comprobación de resultados -, que le ha llevado al reconocimiento del padre de las ciencias fácticas (experimentales), cuya herramienta científica ha sido fundamental en el avance científico de éstas. Dentro de su amplia gama de intereses científicos dos fueron los temas centrales de su trabajo: el estudio experimental del movimiento y la justificación del sistema heliocéntrico.

La teoría aristotélica, de acuerdo con el movimiento natural de los cuerpos, afirmaba respecto a la caída libre de ellos que un objeto entre más pesado fuese caería más rápido. Galileo duda de la certeza del razonamiento de Aristóteles y decide averiguarlo, para ello experimenta con la caída de objetos, pero como la velocidad de caída es muy rápida y no contaba con reloj y mucho menos con cronómetro, diseña su experimento a través del plano inclinado. Para ello Galileo tomó una tabla de 12 "cubits" de largo y medio "cubit" de ancho (alrededor de 20 pies por 10 pulgadas) unos 6 metros por 25 centímetros, un cubit equivale a una distancia de entre 17 y 22 pulgadas (entre 43 y 55 centímetros) y escavó un surco tan recto, pulido y poco profundo como le fue posible por el centro de la tabla. Luego inclinó el plano e hizo rodar bolas de latón bien pulidas, haciéndolo con diferentes inclinaciones, midiendo el tiempo de descenso con un reloj de agua (clepsidra). Después de cada ejecución Galileo pesaba el agua que se había vertido – midiendo el tiempo transcurrido – y lo comparó con la distancia que la bola había recorrido (Mozilla Firefox, 2009).

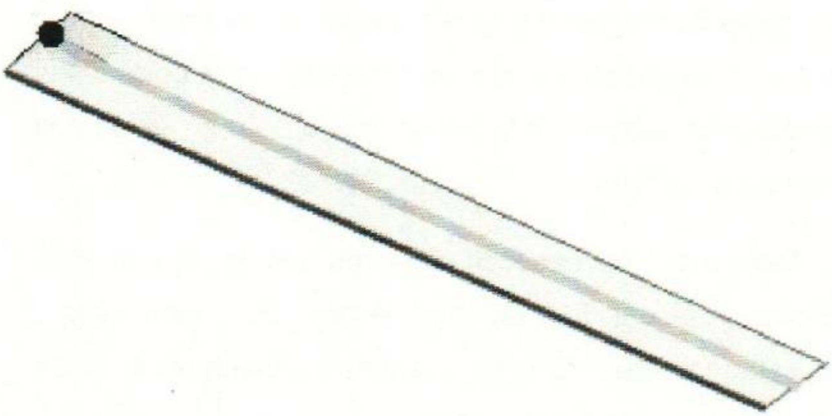


Figura 28. Idea del plano inclinado de Galileo

Galileo observó que entre más vertical estuviese el plano, la velocidad con que la bola de latón se desplazaba se hacía cada vez mayor, alcanzando su máxima aceleración cuando se colocaba totalmente vertical, lo cual significaba que la bola de latón estaba en caída libre. Otra de sus observaciones fue que la aceleración de la bola de latón se mantenía constante a lo largo del plano inclinado en tanto éste no cambiara su inclinación. Así también comprobó que no importaba el peso del objeto lanzado, el tiempo que le llevaba en llegar a la parte de abajo era el mismo, comprobando que Aristóteles estaba equivocado.

Galileo a través de sus experimentos llegó a determinar dos aspectos fundamentales de la caída libre de los cuerpos: 1) que el descenso de los cuerpos variaba como el cuadrado de los tiempos y 2) que la aceleración que los cuerpos sufrían en caída libre era constante. Dicho en otros términos, comprobó que en la caída libre de cualquier objeto se cumplía el teorema de la velocidad media de Oresme y por lo tanto se trataba de un movimiento uniformemente acelerado.

Galileo con sus experimentos en planos inclinados no solo midió la caída de los cuerpos, sino que también se dio cuenta que cuando una bola rodaba hacia abajo por un plano inclinado y después subía por otro plano con cualquier grado de inclinación ésta recuperaba su primera altura. Si el segundo plano tenía menos inclinación que el primero, la bola seguía rodando hasta alcanzar la misma altura a partir de la horizontal que tenía al empezar a rodar. Cuanto más próxima a la horizontal fuera la inclinación del segundo plano, más lejos llegaba la bola, o sea que si el plano fuera perfectamente paralelo a la horizontal, la bola no se pararía nunca y continuaría rodando para siempre.

Con dichas observaciones Galileo inició el descubrimiento de uno de los principios más importantes de la Física, - el principio de inercia- que dice, todo cuerpo tenderá a permanecer en estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta en tanto no sea afectado por alguna fuerza externa.

Otro aspecto físico que Galileo trata es sobre la trayectoria que describe un proyectil al ser lanzado por el aíre, éste había sido un problema que había ocupado la atención desde la época de Aristóteles, si bien se había avanzado con la teoría del ímpetu de Buridan y sus seguidores, nadie antes de Galileo había dicho que la trayectoria seguida por éstos, era una parábola, hecho que lo prueba matemáticamente y apunta que dicha trayectoria sería en ausencia de fricción con el aire.

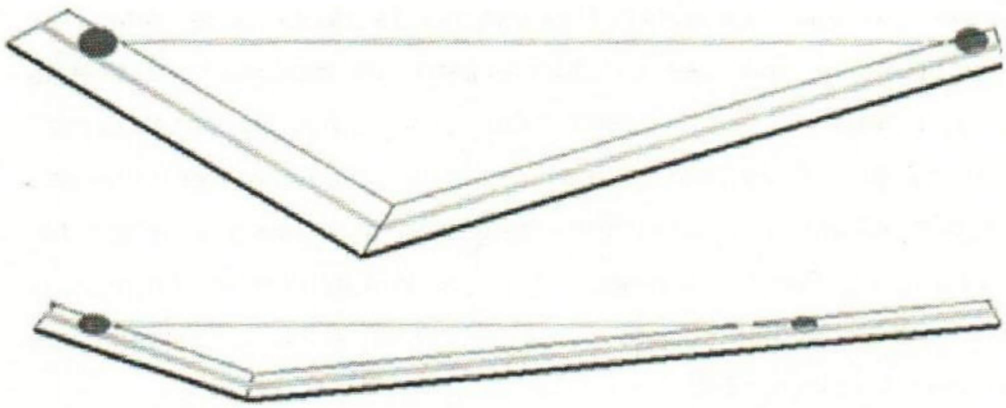


Figura 29. Una bola que se suelta en un plano inclinado alcanza la misma altura en el otro plano con diferente inclinación

Galilei fue capaz de ver que en el lanzamiento de cualquier proyectil actúan dos fuerzas simultáneamente, la del ímpetu que le proporciona el desplazamiento horizontal y la de gravedad que lo hace caer a la tierra, para comprobar su teoría realizó un experimento muy sencillo: colocó dos objetos iguales sobre el borde de una mesa, uno simplemente lo deja caer y el otro le imprime un impulso horizontal, observando que ambos objetos tocan el suelo al mismo tiempo. El experimento lo repite muchas veces y el resultado es el mismo, variando únicamente el desplazamiento horizontal, el cual depende del impulso que se le imprime al objeto, ya que a mayor impulso mayor desplazamiento y viceversa.

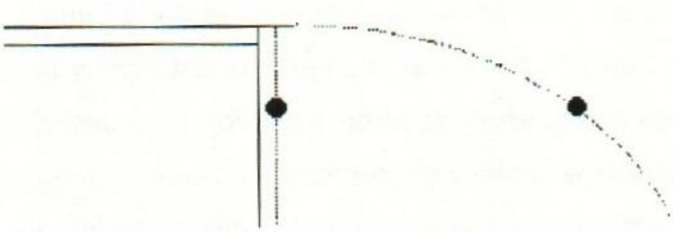


Figura 30. Representación del experimento de Galileo sobre el tiro parabólico

Partiendo de sus observaciones Galileo concluye que la componente vertical del movimiento de un objeto que cae es independiente de cualquier movimiento horizontal que lo acompañe". Con esto se establece lo que hoy se conoce como " Principio de Superposición", es decir, un movimiento se puede considerar formado por otros dos que actúan simultáneamente pero que, para efectos de estudio, puede suponerse que primero ocurre uno y luego, y durante el mismo tiempo, el otro. El cambio de posición de un objeto es independiente de que los movimientos actúen sucesiva o simultáneamente.

Galileo afirma categóricamente que la parábola que describe un objeto lanzado al aire se puede estudiar como la combinación de un movimiento rectilíneo uniforme en su componente horizontal y otro uniformemente acelerado en su componente vertical. Conocimiento que Newton lo usará para explicar el movimiento de los planetas y la Luna.

En cuanto al heliocentrismo, Galileo desde joven era partidario de Copérnico, pero fue a partir de sus observaciones astronómicas con el telescopio que él se convierte en el principal defensor de esta teoría, si bien él no fue el inventor de dicho instrumento, si fue el primero en mejorarlo en cuanto a su alcance y el primero que lo empleo para observar sistemáticamente el universo.

En 1610 publicó su primer obra astronómica llamada *Sidereus nuncius* (El mensajero de los astros), en el describía importantes descubrimientos como los siguientes: dio a conocer la existencia de cráteres, valles y montañas de la Luna, reportó que la Vía Láctea estaba conformada por un sin número de estrellas y la existencia de cuatro pequeños cuerpos que giraban en torno a Júpiter. Este último era una prueba contundente que apoyaba la teoría heliocéntrica, ya que se podía apreciar un sistema similar a los descritos por Copérnico en el mismo sistema solar, además si dichos cuerpos giraban en torno a Júpiter y no en torno a la Tierra era también una prueba de que la Tierra no era el centro del universo, geométricamente en dicha obra aparece el sistema solar como lo muestra la figura 31, en donde Galilei por primera vez representa a Júpiter con sus satélites.

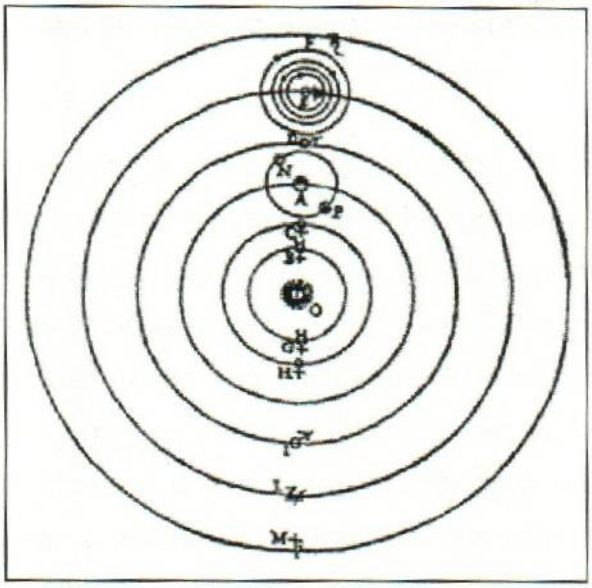


Figura 31. Modelo geométrico del Sistema solar elaborado por Galileo. Fuente: Moreno, 1997, p. 69.

En septiembre del mismo año, Galileo inició una nueva serie de observaciones, sólo que ahora su objetivo fue estudiar a Venus. En enero del siguiente año dio a conocer que ese planeta visto a través del telescopio, presentaba fases como las que regularmente muestra la Luna. Este nuevo descubrimiento también vino a apoyar la tesis copernicana ya que, de acuerdo con el modelo heliocéntrico, Venus es un planeta interior a la órbita que describe la Tierra, visto desde ella tendría que mostrar diferentes secciones iluminadas de su superficie, pues al ir girando alrededor del Sol éste siempre iluminaría la parte de Venus directamente dirigida a él, presentando fases sucesivas, que fue precisamente lo que observó Galileo.

Galileo siguió sus observaciones astronómicas y en 1613 publicó su obra *Istoria e dimostmzioni intomo alle macchie solan e loro accidenti* (Sobre las manchas solares), en donde estableció de forma precisa que las manchas oscuras observadas sobre el disco solar en realidad no estaban fuera de éste y por lo tanto no podían ser Mercurio y Venus en su paso por el disco solar como lo decía Scheiner, sino que pertenecían al Sol, incluso demuestra que dichas manchas se pueden utilizar y los empleó para demostrar de manera exacta el movimiento que este astro realiza en torno a su propio eje.

Galileo que era un hombre que le gustaba la polémica, no tardó en entrar en fuertes discusiones con la Iglesia católica, y aunque en 1616 enfrentó su primer choque con ésta y quedar advertido de que no debería pregonar la teoría heliocéntrica, en 1632 después de haber tenido que librar varios obstáculos y estando como Papa Urbano VIII, amigo personal de Galileo, logra publicar su obra *Diálogo entre los dos grandes sistemas del mundo*, conocido comúnmente como Diálogos, en donde abiertamente se declara copernicano y ridiculiza a simplicio que representaba a los aristotélicos o ticónicos que también consideraban a la Tierra fija. Este hecho lo llevará a los tribunales de la santa inquisición, en donde es obligado a retractarse de sus ideas copernicanas y condenado a vivir el resto de su vida en arresto domiciliario.

4.3 Matematización de la astronomía: Kepler y Newton

El auge comercial en las ciudades del norte de Italia a partir del siglo XV impulsaron fuertemente el desarrollo de la aritmética, en tanto que el redescubrimiento de los textos matemáticos griegos en el siglo XVI hizo resurgir el interés por la geometría. Estas disciplinas luego demostraron su utilidad como herramientas de cálculo y análisis de quienes estaban interesados por estudiar la naturaleza.

Durante los siglos XVI y XVII las matemáticas tuvieron grandes progresos, dentro de los más importantes se destacan: la adopción del sistema de numeración decimal, el descubrimiento de los logaritmos y la invención del cálculo diferencial. El primero de ellos permitió unificar y simplificar la notación aritmética, mientras que el segundo facilitó considerablemente el manejo de grandes cifras y el tercero permitió el cálculo de movimientos instantáneos e infinitesimales. Gracias a esos avances se redujo en forma importante el tiempo y el esfuerzo dedicado a la complicada y laboriosa construcción de las tablas numéricas utilizadas en las operaciones matemáticas y dio gran precisión en los cálculos de movimientos.

Esto resultó especialmente valioso para la astronomía, donde había necesidad de realizar extensos y complejos cálculos para determinar las posiciones planetarias.

Se puede decir que desde Copérnico las matemáticas desempeñaron un papel fundamental en la Astronomía, así lo concibió él mismo, en la dedicatoria de su libro De revolutionibus al Papa Pablo III, escribió que la matemática debería estar en manos de expertos, únicos capacitados para juzgar sus logros. Galileo Galilei también reconocía la importancia de esta disciplina y aunque no se dedicó a estudiarla como una disciplina autónoma hizo mucho uso de ella y al respecto escribió "quien quiera responder a cuestiones de la naturaleza sin la ayuda de las matemáticas, emprenderá lo irrealizable. Se debe medir lo medible y hacer que lo sea aquello que no lo es" (Moreno, M. 1997, pág. 73).

En el presente subcapítulo se aborda la matematización de la astronomía del siglo XVII, iniciando con Kepler, donde se destacan sus leyes y ejemplifican a través de algunos cálculos las aplicaciones de ellas. Luego se aborda a Newton tratando de entender la síntesis que éste gran científico realizó de sus antecesores (Copérnico, Kepler y Galileo) al construir su edificio intelectual en lo que respecta a la teoría de la gravitación universal, se ejemplifican algunos cálculos que realizó en el movimiento de la Luna y su ampliación hacia los planetas.

Johannes Kepler

Johannes Kepler (1571 – 1630) dejó manifiesta su habilidad matemática desde que en 1596 publicara su primera obra "El Mysterium Cosmographicum" (El secreto del universo). En ella buscó la correlación que debería existir entre las diferentes órbitas planetarias, tratando de establecer relaciones geométricas entre las distancias de los diferentes planetas al Sol, calculadas según el modelo heliocéntrico de Copérnico.

A lo largo de sus obras, Kepler siempre tuvo la certeza *de que existía un orden matemático oculto en la naturaleza, el cual se manifestaba mediante armonías del universo*. Siguiendo esa línea de razonamiento y empleando una rigurosa aproximación matemática, trató de construir un modelo geométrico, donde los planetas guardaran una relación directa con los cinco sólidos perfectos. Siguiendo una manera típica de pensar pitagórica había concluido que sólo esos cuerpos tenían las propiedades necesarias para contener cada uno de los planetas. En su modelo ubicó al Sol en el centro de las esferas planetarias, y éstas las separó entre sí sucesivamente por un octaedro, un icosaedro, un dodecaedro, un tetraedro y un hexaedro como se muestra en la siguiente figura. Como todos sus esfuerzos por adecuar los resultados de sus cálculos a esa representación fallaron, años después intentó encontrar una estructura del universo estudiando la relación que guardan las armonías de la escala musical, volviendo así a la idea pitagórica de la música de las esferas y de las relaciones místicas.

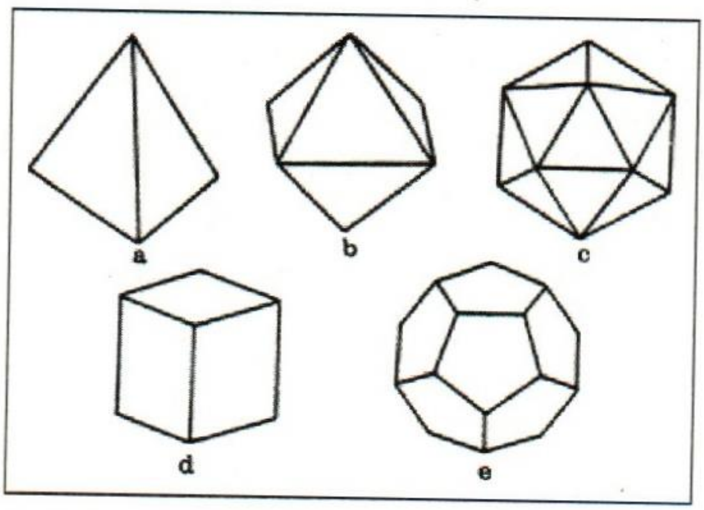


Figura 32. Los cinco sólidos platónicos. El tetraedro (a), el cubo (d), el octaedro (b), el dodecaedro (e) y el icosaedro (c). Fuente: Moreno, 1997, p. 73

Aunque el modelo anterior pareciese un retroceso, en realidad significó todo un cambio de actitud en la astronomía, en él, Kepler no solo intentó describir los movimientos planetarios geometrizando el cosmos, sino que buscó las causas físicas que originaban dichos desplazamientos, lo cual lo puso en el camino correcto. En el Mysterium Cosmographicum estableció que los planos que contienen a cada órbita se hallan próximos entre sí, pero con respecto a la eclíptica cada uno tiene una inclinación diferente que permanece constante. Este descubrimiento lo llevó a establecer las leyes que rigen el movimiento planetario.

La publicación de su primer obra fue ampliamente conocida en Europa y entre sus lectores estuvo Tycho Brahe, quien vio en Kepler el hombre que necesitaba para calcular la órbita del planeta Marte, del cual había acumulado gran cantidad de datos observacionales. Brahe invitó a Kepler a colaborar con él, éste acepta y se traslada a Praga lugar que era mucho más tolerante a los protestantes. Brahe le asigna como tarea principal calcular la órbita de Marte. Al principio Kepler intentó encontrar la órbita del planeta bajo el supuesto ortodoxo de que las órbitas planetarias eran círculos perfectos. Sin embargo, pasó un año, falleció Brahe y él no había encontrado la órbita deseada, ya que por más que intentaba ajustarlo a una circunferencia aunque estuviese el Sol descentrado, simplemente no coincidían, había una diferencia de 8 minutos de arco, algo muy exagerado tomando en cuenta la precisión de las observaciones de Tycho. A la muerte de Brahe, Kepler heredó toda la información sobre las observaciones astronómicas de éste gran astrónomo, pero con la finalidad de asegurarse de que los datos estaban tomados correctamente decidió realizar más observaciones sobre el planeta rojo, ya que en el fondo él creía que la órbita debería ser una circunferencia. Una vez que él mismo extendió el número de observaciones sobre dicho planeta procedió a trazar geométricamente la órbita de éste.

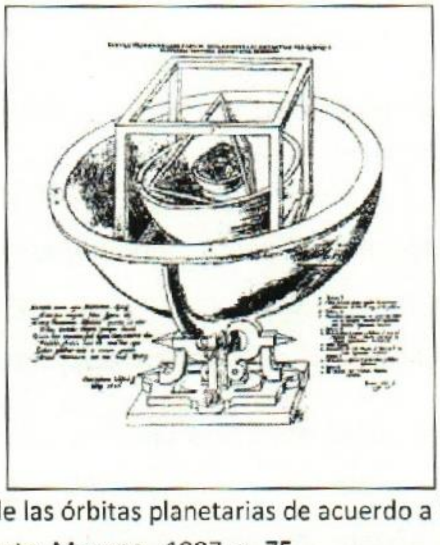


Figura 33. Representación de las órbitas planetarias de acuerdo a las ideas de Kepler sobre los cinco sólidos perfectos. Fuente: Moreno, 1997, p. 75

Pero, ¿cómo logró Johannes Kepler trazar la órbita elíptica del planeta Marte?. Para hacerlo procedió de la siguiente manera:

Primero definió la órbita de la Tierra, para ello tomó en cuenta el movimiento de Marte, el cual vuelve a su misma posición aproximadamente cada dos años y como la Tierra también está en movimiento, observó la nueva posición de ésta cuando dicho planeta regresaba a su posición original y procedió a triangular dichas posiciones y de esa manera localizar un punto de la órbita. Él poseía información de muchos años que le heredó Brahe, más las que él obtuvo directamente. Realizó lo mismo para los siguientes períodos en los que Marte retornaba a su misma posición y triangulando nuevamente fue encontrando otros puntos que le permitieron definir la órbita de la Tierra, como lo muestra la figura 34.

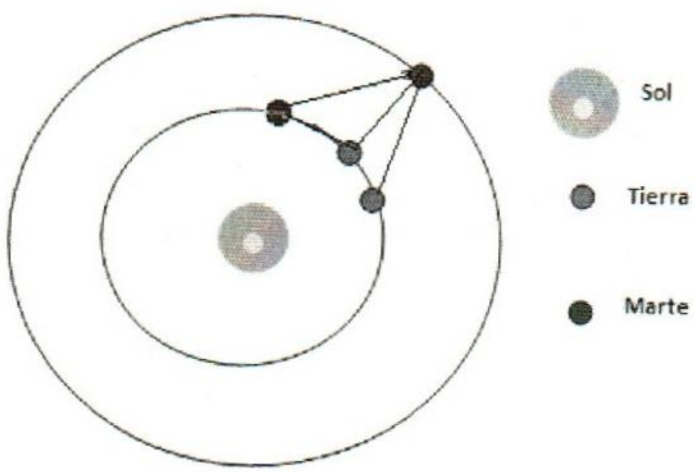


Figura 34. Esquema que muestra la idea de Kepler para encontrar la órbita de la Tierra

Al encontrar un círculo aunque no estuviera perfectamente centrado en el Sol, Kepler dio un paso en la dirección correcta, ya que una vez definida la órbita de la Tierra, ésta le sirvió de apoyo para calcular la órbita de Marte.

Para su siguiente tarea, Kepler utilizó el mismo principio de que aproximadamente cada dos años el Sol, la Tierra y Marte se encuentran en forma colineal. Situaba como punto de partida dicho acontecimiento, luego al retornar Marte a la misma posición, la Tierra tenía una posición distinta a la que tenía en la posición inicial, y triangulando encontraba una posición exacta de Marte sobre su órbita, al volver a estar alineados los planetas, Kepler volvía a tomarlo como punto de partida y al retornar el planeta roja a dicha posición la Tierra ya se encontraba en otra y volvía a triangular y de esa manera iba determinando los puntos sobre la órbita que Marte estaba siguiendo, como se muestra en la figura 35.

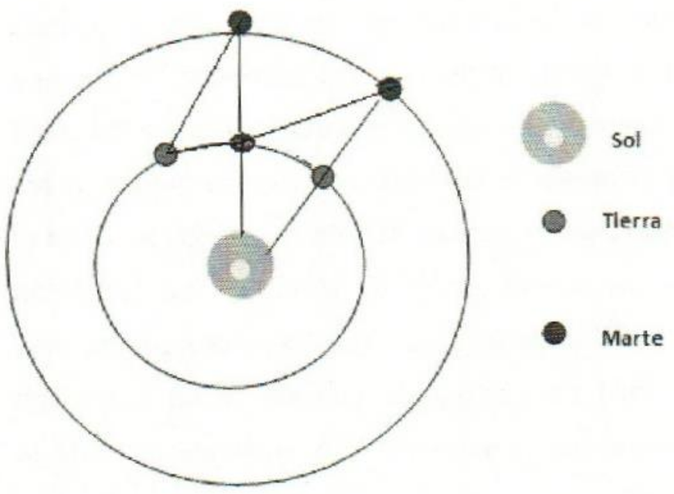


Figura 35. Esquema que representa la idea de Kepler para trazar la órbita de Marte

Una vez que estuvo seguro del trazo geométrico de la órbita marciana, se dio cuenta que la circunferencia no era la curva que describía dicho planeta, probó con un oval y tampoco, hasta que la elipse con 0.09 de excentricidad con el Sol situado en uno de sus focos coincidía perfectamente con sus datos reales, por lo que no tuvo ninguna duda de que el planeta rojo seguía ésta órbita, como lo demuestra la carta enviada al astrónomo David Fabricius.

En diciembre de 1604 Kepler envió una carta al astrónomo David Frabricius, a quien Kepler daba mucho crédito, informándole que la órbita de Marte era una elipse con 9% de excentricidad y con el Sol en uno de sus focos, Fabricius le responde lo siguiente: "Con vuestra elipse quitáis la circularidad y uniformidad a los movimientos planetarios, lo cual me parece tanto más absurdo cuanto más profundamente pienso en ello. Si al menos pudierais conservar la órbita circular perfecta, y justificarais vuestra órbita elíptica mediante otro pequeño epiciclo sería mucho mejor" (Moreno, M. 1997, pág. 77). Esta actitud caracterizaba prácticamente a todos los astrónomos de ese tiempo.

Kepler continuo sus estudios planetarios completamente convencido de que sus resultados hasta el momento eran correctos y observó que los planetas entre más alejados del Sol se encontraban se movían más lentamente, por ejemplo, Saturno se encuentra dos veces más distante que Júpiter del Sol, sin embargo su período es dos veces y media mayor, ya que Júpiter tarda 12 años terrestres en dar una vuelta alrededor del astro rey, en tanto que Saturno le lleva cerca de 30 años terrestres. Estas observaciones lo condujeron al siguiente razonamiento: o las almas que mueven a los planetas son menos activas cuanto más lejos se halla el planeta del Sol, o existe tan solo una *anima motrix* en el centro de todas las órbitas, es decir, el Sol, que dirige a los planetas más vigorosamente cuanto más cerca está, pero cuya acción se halla casi exhausta cuando actúa sobre los planetas exteriores debido a lo grande de la distancia y a la debilitación de la acción que lo vincula.

La idea de que el anima motrix emana del Sol es un antecedente directo del concepto de fuerza centrípeta que más tarde desarrolló Newton y que se verá más adelante, pero la profundidad del pensamiento de Kepler queda completamente manifiesto con estos razonamientos.

En agosto de 1609 Kepler publicó sus resultados sobre el estudio de la órbita de Marte en un texto al que tituló *Astronomia nova, seu physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus G. V. Tychonis Brahe* ("Nueva astronomía basada en la física celeste derivada de las investigaciones de los movimientos de la estrella Marte. Fundada en las observaciones del noble Tycho Brahe"). Esta obra, mejor conocida como *Astronomía Nueva,* contiene las dos primeras leyes del movimiento planetario, que en lenguaje actual pueden ser enunciadas de la siguiente manera:

Primera ley: Todos los planetas siguen en su movimiento órbitas elípticas, encontrándose el Sol localizado en uno de sus focos.

Esta ley Kepler lo expresó matemáticamente a través de la siguiente ecuación

$$r = \frac{ed}{(1 + e\cos\theta)}$$

Segunda ley: La velocidad con la que se desplazan los planetas en sus órbitas no es uniforme, sino que lo hacen de tal forma que una línea imaginaria trazada desde el centro de cada planeta al Sol barrerá áreas iguales en tiempos iguales.

Esta segunda ley, llamada también de las áreas, deja completamente claro que la velocidad con la que orbitan los planetas es mayor cuando se encuentran en el perihelio y menor en el afelio, para que las áreas puedan ser iguales. En la figura 36 se observa que las áreas A, B y C son iguales, pero las distancias recorridas por el planeta son distintas, por lo que necesariamente las velocidades son diferentes.

En términos actuales la segunda ley de Kepler se expresa matemáticamente a través de la siguiente ecuación.

$$\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dt}} = \text{Constante}$$

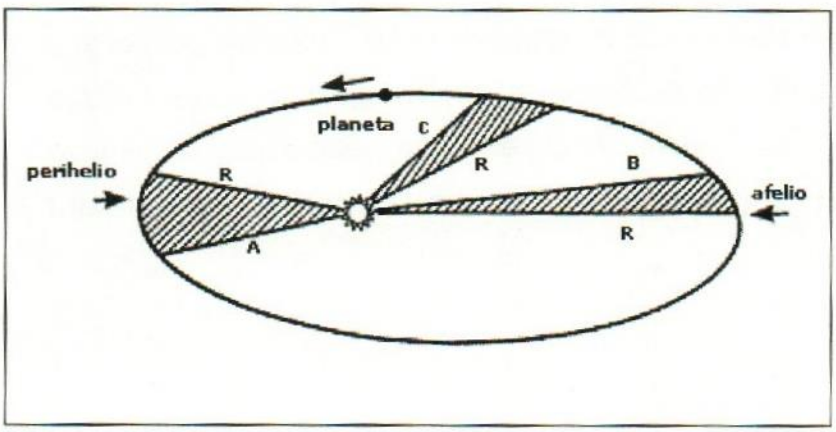


Figura 36. Representación gráfica de la segunda Ley de Kepler. Fuente: Moreno, 1997, p. 78

Kepler continúo estudiando a los planetas y convencido de que había un orden matemático oculto en la naturaleza y después de un largo proceso de prueba y error, finalmente en 1618 publica su obra el *De Harmonice Mundi* ("Armonías del mundo"), obra en la que dio a conocer la última de sus leyes del movimiento planetario. Esta ley liga el periodo de traslación de los planetas en torno al Sol con la distancia a éste. En términos actuales se puede expresar de la siguiente manera:

Tercera ley: Los cuadrados de los tiempos de revolución de cualesquiera dos planetas en torno al Sol, son proporcionales a los cubos de sus distancias medias a éste, o bien el cuadrado de los períodos de los planetas es proporcional al cubo del semieje mayor.

$$T^2 = ka^3$$

Las tres leyes de Kepler son afirmaciones precisas y verificables que se expresan y manejan en forma matemática como se ha expuesto líneas arriba, a continuación se expone una de las aplicaciones que Kepler realizó de su tercera ley para calcular la distancia que hay entre Júpiter y el Sol.

Partiendo de la expresión $T^2 = ka^3$ al despejar k se obtiene $k = \frac{T^2}{a^3}$, por lo tanto, como k es una constante igual para todos los planetas, se puede comparar el período de cualquier planeta con el de la Tierra y sus respectivas distancias al Sol y despejar la distancia a del planeta que se requiera. De lo dicho anteriormente y considerando que la distancia de la Tierra al Sol es igual a 1 UA (unidad astronómica), que el período de nuestro planeta es 1 año y que Júpiter su período es igual a 11.86 años terrestres, Kepler procedía de la siguiente manera para calcular dicha distancia

$$\frac{T_t^2}{a_t^3} = \frac{T_j^2}{a_j^3}$$

Donde T_t = Período de la Tierra, T_j = período de Júpiter, a_t = distancia de la Tierra al Sol, a_j = distancia de Júpiter al Sol.

Despejando a_j de la expresión anterior Kepler obtenía

$$a_j = \sqrt[3]{a_t^3 \frac{T_j^2}{T_t^2}}$$

Sustituyendo sus valores respectivos se tiene

$a_j = \sqrt[3]{(1)^3 \frac{(11.86)^2}{(1)^2}}$ = 5.200636017 UA o redondeado 5.2 UA

En la expresión anterior, se puede observar que a_t^3 y T_t^2 serán siempre iguales a uno, dado que a se considera igual a una unidad astronómica y T igual un año terrestre, por ello, para calcular las distancias medias de los demás planetas al Sol, simplemente se sustituye sus períodos en la fórmula anterior, lo cual le permitió a Kepler calcular por primera vez las distancias que los separaba del Sol. Al aplicar las otras leyes determinó también las ecuaciones que describían, la excentricidad, etc.

La importancia de las tres leyes keplerianas radica en que, al aplicarlas, es posible calcular con gran precisión todos los datos necesarios para determinar cómo se desplaza cada uno de los planetas alrededor del Sol, así como el de los satélites alrededor del planeta al cual giran, el de las estrellas binarias, han servido de base para la puesta en órbita de los satélites artificiales, etc. En fin tienen precisamente el carácter de leyes.

Entre 1618 y 1622 Kepler publicó su última obra titulada *Epitome Astronomiae Copernicanae* ("Compendio de astronomía copernicana"), donde expuso sus resultados sobre el cálculo de distancias y tamaños de los cuerpos del sistema planetario, así como sus ideas cosmológicas. Mencionó especialmente sus descubrimientos sobre el carácter elíptico de la órbita marciana y lo que había logrado obtener Galileo mediante el uso del telescopio. En ese texto afirmó y demostró que las leyes que había encontrado para el caso particular del movimiento de Marte eran aplicables a los demás planetas, así como a sus satélites.

Este compendio es el primer manual completo de astronomía construido enteramente bajo los conceptos heliocéntricos y en donde desaparece totalmente los epiciclos y la concepción platónica de las órbitas circulares. Además trata de la forma y del tamaño de la Tierra y su lugar en el universo.

En dicha obra y siguiendo su particular forma de buscar armonías matemáticas en el universo, Kepler desarrolló la idea de relacionar la densidad de cada planeta con su tamaño y distancia al Sol. Las densidades planetarias las derivó al establecer una correspondencia directa con las densidades de metales como el hierro, el plomo, la plata y el oro, y con la de algunas piedras preciosas, ya que pensó que esos materiales estaban relacionados con cada uno de los planetas. Así obtuvo que Saturno gira alrededor del Sol a una distancia 10 veces mayor que la Tierra. Según sus cálculos, Júpiter lo hacía a 5.2 y Marte a 1.5 UA, mientras que Venus se localizaba a 0.7 veces la distancia Tierra-Sol y Mercurio a sólo 0.4 veces el valor de esa unidad. En esta obra también cuestiona el valor de la unidad astronómica UA que se estimaba en 1210 radios terrestres desde la época de Tolomeo, él lo estimó en 3 460 radios terrestres y consideró que las estrellas fijas se encontraban 2000 veces más lejos que la distancia del Sol a Saturno, por lo que le dio dimensiones muy superiores a las que se consideraba las medidas del universo en esos tiempos.

La importancia de las obras de Kepler se puede resumir diciendo que la astronomía que él desarrolló fue una reformulación completa de los métodos, principios y objetivos de esta disciplina, pues al conjuntar las mejores observaciones entonces disponibles con los nuevos y poderosos desarrollos matemáticos, marcó definitivamente el rumbo a seguir para todos aquellos que aspiraran a entender las leyes que rigen el comportamiento de los astros.

Isaac Newton y la ley de gravitación universal

Isaac Newton (1642 – 1727) nació en Inglaterra y desde muy joven comenzó a estudiar las teorías y descubrimientos de Copérnico, Kepler y Galileo y sobre todo aquellos aspectos del universo que aún seguían ocultos a la humanidad, así como los fenómenos terrestres que no habían revelado sus secretos al hombre. Estos grandes genios habían logrado explicar cómo se movían los cuerpos celestes y los objetos cercanos a la superficie terrestre, a Newton le correspondió deducir el porqué. Antes de él nadie sabía porque los cuerpos cercanos a la superficie terrestre caen con el mismo ritmo, ni porqué la Luna orbita alrededor de la Tierra en una trayectoria determinada y a una marcha precisa, tampoco porqué la Tierra y los otros planetas giran alrededor del Sol, con órbitas bien definidas y ritmos precisos. Antes de Newton nadie relacionó estos fenómenos, fue él quien creó una nueva ciencia que unificó la mecánica del cielo y la de la Tierra.

Como se dijo en los antecedentes, desde Aristóteles se consideraba que los objetos pesados caían hacia la Tierra por la naturaleza de éstos, sin dar mayor explicación y nadie antes de Newton lo cuestionó. Por otra parte, se consideraba que los movimientos supralunares eran distintos a los sublunares y aunque ya Kepler había roto la circularidad del movimiento planetario se seguía creyendo que las leyes que reinaban en el cielo eran distintas a las que regían en la Tierra. Fue Newton a través de la ley de gravitación universal que puso fin a esas cosmovisiones y demostró que la misma ley que explica el movimiento de la caída de los cuerpos en las cercanías de la superficie terrestre, explica también el comportamiento del movimiento de los cuerpos celestes. Si bien Newton fue un gran genio y realizó otros importantes descubrimientos como el cálculo diferencial y realizó grandes aportaciones a la óptica y la mecánica, fue la ley de gravitación universal la que le dio grandes dimensiones en el terreno científico y permitió entender la dinámica cósmica y comprender las causas que obligan a los cuerpos celestes a describir las trayectorias observadas. Al establecer la expresión matemática que permite calcular cómo y dónde actúa la fuerza de gravedad, Newton pasó de la mera descripción del movimiento a una interpretación de las causas de éste.

En 1687 fue publicada en Londres la obra más importante de Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("Principios matemáticos de la filosofía natural"), más conocido como "Los principia" de ésta obra monumental se resalta a continuación los aspectos que se consideran más relevantes: a) de los trabajos que se habían realizado del movimiento y sobre todo de los experimentos que Galileo había hecho en sus planos inclinados para estudiar la caída libre de los cuerpos, y siguiendo un estricto marco matemático logró encontrar leyes generales aplicables a cualquier tipo de movimiento, b) reconoció que la masa de los cuerpos es una medida de la resistencia que tienen a cambiar su estado de reposo o de movimiento, c) precisó y definió el concepto de fuerza y le dio un carácter operacional, d) todo ese trabajo conceptual y matemático le permitió establecer las tres leyes del movimiento, con lo cual sentó las bases de la mecánica y e) con todo lo establecido en los incisos anteriores fue capaz de crear la ley de gravitación universal.

Todos los astrónomos, pensadores y hombres de ciencia que vivieron en el lapso de tiempo comprendido entre los «Diálogos» de Galileo y los «Principia» de Newton, se resistían al movimiento de la Tierra y se sentían acobardados por las ideas dogmáticas y confesionales prevalecientes durante la Edad Media. Pero Newton, sin abandonar sus propias creencias religiosas, con su genial posición tiene una trascendencia y un inigualado significado dentro del proceso que se inicia en la humanidad para esclarecer las ideas cosmológicas y de la configuración del universo. Con su genio provocó el derrumbe definitivo de las antiguas concepciones aristotélicas y abrió las puertas para que la mente del hombre, hasta entonces aprisionada por las enmohecidas rejas del aristotelismo, volara libre de toda traba. Él elevó la universalidad de las leyes físicas a su máxima expresión. Sobre su mecánica se tuvieron que basar los avances científicos y tecnológicos de los siglos XVIII y XIX y gran parte del XX.

La ley de gravitación universal de Newton establece que dos cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Con esta ley Newton explica porque cualquier objeto cercano a la superficie terrestre cae hacia el centro de ésta con una aceleración constante, pero no la Luna desde el cielo. El gran mérito de Newton no fue mostrar que la gravedad hace caer cualquier objeto, eso todo el mundo lo sabía. Su gran descubrimiento consistió en demostrar precisa y matemáticamente que la misma ley que explica porqué cae un objeto en las cercanías de la superficie terrestre, explica también porqué la Luna orbita alrededor de la Tierra y como ésta y todos los demás planetas orbitan alrededor del Sol, esa explicación fue la clave del universo tal y como se entendía entonces.

Matemáticamente, Newton expresó la ley de gravitación universal mediante una ecuación vectorial con una constante de proporcionalidad llamada constante de gravitación universal (G), esta constante es igual para cada par de cuerpos del universo, expresándolo de la siguiente manera:

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Donde: F = fuerza con que se atraen ambos cuerpos

m_1 y m_2 las masas de los cuerpos 1 y 2

r la distancia entre los centros de masa de ambos cuerpos

G=6.67·10^{-11} Nm^2/kg^2

La ley de Newton establece que en cualquier parte del universo hay una fuerza entre cualquier par de masas, por consiguiente cada particula de masa de cualquier cuerpo es atraída por cada partícula de la masa del segundo cuerpo, pero el efecto resultante de esas fuerzas sumadas es que cada cuerpo atrae al otro como si toda su masa estuviese concentrada en su centro de masa, es por ello que r debe medirse entre los centros de masa de los cuerpos.

Para calcular la fuerza con que la Tierra atrae a cualquier objeto ubicado en las cercanías de la superficie terrestre, él partió de la ecuación anterior y procedió de la siguiente manera.

$$F = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Siendo m_1 la masa de cualquier objeto, m_2 la masa de la Tierra, r el radio de la Tierra, la altura a la que se encuentra el objeto es despreciable comparada con el radio de la tierra.

Por otra parte la tercera ley de Newton, establece que F = ma, es decir, fuerza es igual masa por aceleración, sustituyendo F de la primera expresión por su equivalente m_1g, ya que m_1 es la masa de de cualquier objeto y g es la aceleración con que la Tierra atrae a cualquier objeto o sea la gravedad, se tiene.

$$m_1 g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Algebraicamente, m_1 se elimina, por lo que la fuerza de gravedad en las cercanías de la superficie de la Tierra para cualquier objeto, se puede expresar matemáticamente con la siguiente ecuación:

$$g = -G\frac{m_2}{r^2}$$

Newton introdujo los valores respectivos de G = $6.67*10^{-11}$ Nm^2/kg^2, m_2 = $5.98*10^{24}$ kg, r =$6.37*10^6$, y obtuvo:

$$g = -\frac{6.67*10^{-11} Nm^2/kg^2 * 5.98*10^{24} kg)}{(6.37*10^6 m)^2} = 9.829878576 = 9.83 m/s^2$$

Con lo cual Newton comprobó que la ley de gravitación universal y la tercera ley funcionaban a la perfección de acuerdo con los datos que Galileo ya había calculado sobre la caída de los cuerpos en las cercanías de la Tierra.

Una vez que Newton comprobó que su teoría funcionaba correctamente para la caída de los cuerpos en las cercanías de la Tierra, pasó a explicar porqué la Luna en lugar de estrellarse contra la Tierra orbita alrededor de ella. Para esto él se imaginó, que si se ubicase en una montaña tan alta como fuese posible y lanzara un proyectil en forma horizontal a la posición que él tuviese, el proyectil llegaría más lejos entre más velocidad inicial le imprimiera. Él ya sabía por el descubrimiento de Galileo que un cuerpo que cae desde 16 ft de altura sobre la superficie de la Tierra, alcanza el suelo en un segundo, pero si el proyectil se lanza en forma horizontal a una velocidad inicial de 30 ft/seg, recorrerá 30 ft horizontalmente antes de llegar al suelo un segundo después, si la velocidad inicial fuese de 60 ft/seg el proyectil alcanzaría una distancia horizontal sobre el suelo de 60 ft, etc. Newton se dio cuenta que si el proyectil se disparase suficientemente rápido, tardaría más de un segundo en llegar al suelo, ya que la superficie de la Tierra se va curvando por debajo del proyectil antes de que la alcance y que entre más fuerte fuese la velocidad inicial, más lejos llegaría. Él imaginó un movimiento tan rápido que el objeto lanzado se mantiene cayendo mientras que la superficie de la Tierra se va curvando por debajo de ella, dicho de otro modo, el proyectil se mantendría en órbita como se muestra en la figura 37.

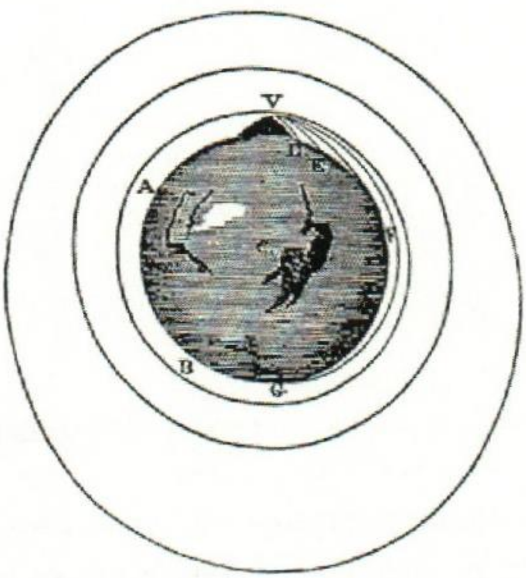


Figura 37. Esquema de Newton sobre las trayectorias de un proyectil lanzado horizontalmente desde lo alto de una montaña con diferentes velocidades iniciales hasta alcanzar a orbitar. Fuente: Moreno, 1997, p. 83

Este razonamiento lo aplicó a la Luna y se dio cuenta que ésta por inercia tiende a irse en línea recta, pero la Tierra lo atrae con su fuerza de gravedad hacia el centro de ella, dando como resultado que nuestro satélite natural curve su trayectoria, a dicha fuerza la llamó centrípeta, porque lo atrae hacia el centro de dicho astro. Dado que la fuerza de gravedad terrestre se mantiene constante y la velocidad lunar varía muy poco, el resultado es la trayectoria elíptica con muy poco excentricidad de la Luna alrededor de la Tierra.

Para calcular la caída que sufre la Luna hacia la Tierra cada segundo, Newton supuso que tanto la velocidad de la Luna como la fuerza centrípeta de la Tierra eran constantes y por lo tanto formaban una circunferencia, dicha situación se representa en la figura 38.

En dicha figura, r representa la distancia que hay entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna que Newton lo estimó en 15 133 858 000 pulgadas, d la distancia que recorre la Luna en un segundo que lo calculó en 40 281 pulgadas y c representa la caída de la Luna hacia la Tierra en un segundo.

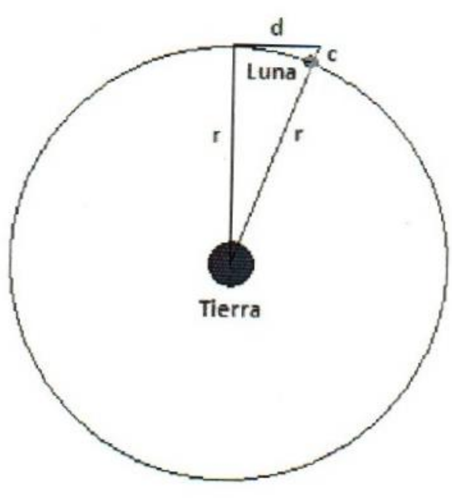


Figura 38. Idea del esquema newtoniano para calcular la aceleración de caída de la Luna

Newton sabía que la Luna tardaba alrededor de 27.3 días para dar una vuelta a la Tierra y que por el principio de inercia, ésta tendía a irse en línea recta sobre la línea d de la figura 38, pero la fuerza de gravedad de la Tierra lo atraía hacia ella.

Para calcular la caída de la Luna aplicó el teorema de Pitágoras y despejó c, con un procedimiento muy similar al que se presenta a continuación:

$$r^2 + d^2 = (r + c)^2$$

$$r^2 + d^2 = r^2 + 2cr + c^2$$

$$d^2 = 2cr + c^2$$

c es una cantidad muy pequeña por lo que al elevarlo al cuadrado se hace todavía mucho menor, razón por la que Newton lo consideró insignificante y lo desechó, transformando la última expresión en la siguiente

$$d^2 \approx 2cr$$

$$c \approx \frac{d^2}{2r}$$

Al sustituir los valores respectivos se obtine

$$c = \frac{(40281)^2}{2(15133858000)} = 0.053606917$$

Por lo que Newton en términos redondeados estimó que la Luna caía cada segundo 0.05 pulgadas, es decir, un veinteavo de pulgada por segundo al cuadrado.

Newton comprobó estos resultados empleando la fórmula usada en la caída libre de los cuerpos en las proximidades de la superficie terrestre y la que se emplearía para calcular la aceleración que la 'Tierra ejerce sobre la Luna (a_L). Para ello Newton partió de que la Luna cae hacia la Tierra con una aceleración G multiplicada por la masa de la Tierra (M_T) y dividida entre la distancia que separa los centros de la Tierra y de la Luna (r_{TL}), como se indica en la expresión siguiente.

$$a_L = G\frac{M_T^2}{r_{LT}^2}$$

La fórmula es la misma que se emplea para calcular la aceleración en el caso de cualquier cuerpo que cae en las proximidades de la superficie terrestre, solo que en lugar del radio de la Tierra se emplea el radio de la Luna a la Tierra, es decir, la distancia entre los centro lunar y terrestre, como se expresa a continuación.

$$g = G\frac{M_T^2}{r_T^2}$$

Newton dividió la primera expresión entre la segunda y despejó a_L con un procedimiento similar al que se indica a continuación.

$$\frac{a_L}{g} = \frac{G\frac{M_T^2}{r_{LT}^2}}{G\frac{M_T^2}{r_T^2}}$$

$$\frac{a_L}{g} = \frac{r_T^2}{r_{LT}^2}$$

$$a_L = g\left(\frac{r_T}{r_{LT}}\right)^2$$

Es decir, la aceleración que sufre la Luna por la atracción de la Tierra se puede expresar por dicha igualdad.

Newton sabía que la distancia que separa a la Luna de la Tierra era aproximadamente 60 radios terrestres, dicho valor lo empleo para calcular la aceleración obteniendo lo siguiente.

$$a_L = g\left(\frac{1}{60}\right)^2$$

$$a_L = \frac{g}{3600}$$

$$a_L = \frac{192.57}{3600} = 0.053491666 \text{ pulgadas}$$

Por lo que Newton concluyó que prácticamente era igual al resultado obtenido anteriormente y comprobó que su procedimiento era correcto y matemáticamente checaba todo a la perfección.

Una vez mostrado su procedimiento matemático, éste simplemente lo extendió para las lunas de los demás planetas y para los planetas mismos, solo que en éste último caso el centro lo ocuparía el Sol y los planetas se ubicarían en las órbitas, los cuales se trasladan a gran velocidad sobre ellas.

Lógicamente, Newton trató matemáticamente muchos más aspectos del sistema solar, sin embargo, para los fines del presente trabajo, con lo expresado hasta aquí es suficiente y nos proporciona las bases necesarias para abordar el siguiente subcapítulo y con ello poder matematizar los efectos lunares sobre las plantas que existen en la superficie terrestre.

4.4. Matematización de las mareas oceánicas provocadas por el efecto gravitatorio de la Luna y el Sol.

Los fundamentos físicos de las mareas oceánicas provocadas por los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol son simples, sin embargo, su análisis cuantitativo es bastante complejo, por esta razón se analizará matemáticamente de dos maneras: la convencional que es la que se encuentra en la mayoría de los textos que tratan este tema y la cosenoidal que se propone como una aproximación alternativa.

El fenómeno que se pretende modelar, es el de encontrar la forma que adopta la superficie libre de una capa de agua de profundad homogénea que cubre toda la Tierra, cuando consideramos las fuerzas de atracción que ejercen la Luna y Sol.

4.4.1 La forma convencional

Basados en la teoría de la gravitación universal de Newton, el origen de las fuerzas que provocan las mareas se debe a que la Tierra es un cuerpo extenso y el campo gravitatorio producido por la Luna y por el Sol no son homogéneos en todas partes de la superficie terrestre, ya que hay lugares que están más cercanos y otros más alejados de dichos astros.

Para iniciar el análisis se parte de los siguientes supuestos: la Tierra es un cuerpo rígido de forma esférica de radio *R*, que está cubierta por una capa de agua de espesor uniforme y de pequeña profundidad. Los cuerpos perturbadores, la Luna y el Sol se ubican en el plano ecuatorial de la Tierra con órbitas circulares. Aunque el Sol y la Luna se mueven, se considera que el agua está en todo momento en equilibrio, la velocidad y la aceleración de cualquier elemento líquido respecto de la Tierra se considera despreciable.

Con fines de simplicidad, se parte considerando que el único cuerpo perturbador que provoca las mareas es la Luna, las mismas fórmulas se aplican para el Sol cambiando únicamente sus respectivos valores y finalmente se analiza el efecto combinado de ambos cuerpos celestes.

Se consideran a la Tierra y a la Luna inmóviles en el espacio, estando sus centros separados una distancia fija *r*. La fuerza de marea, en las posiciones A, B y C de la figura 39 ubicados estratégicamente en lugares extremos de la superficie terrestre con respecto a la Luna, es igual a la diferencia entre la fuerza de atracción que la Luna ejerce sobre un objeto situado en dichas posiciones y la fuerza de atracción que ejercería sobre tal objeto si estuviese en el centro de la Tierra.

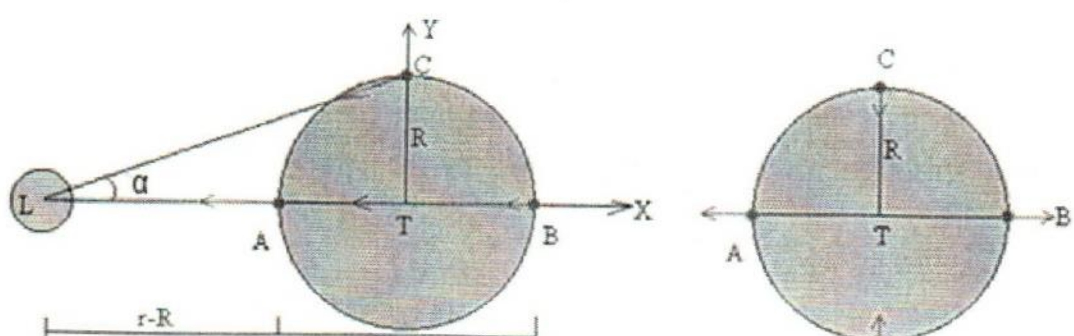


Figura 39. Representación vectorial de las fuerzas de marea provocadas por la Luna sobre posiciones extremas en la superficie de la Tierra

En la figura anterior, en la parte izquierda las flechas que parten de los puntos A, B y C, representan las fuerzas de atracción que la Luna ejerce sobre un objeto de masa *m* situado en dichos puntos, y la que parte del punto T, la fuerza que ejercería sobre dicho objeto si éste estuviese situado en el centro de la Tierra. A la derecha, se dibujan las fuerzas de marea, obtenidas por la diferencia entre los vectores que parten de los puntos A, B y C y el último que parte del punto T.

De acuerdo con la fórmula de la fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos, vista en el subcapítulo anterior, en el centro de la Tierra T, la fuerza de atracción que la Luna ejerce sobre un objeto de masa m, está dirigida hacia el centro de ésta y se calcula con la siguiente expresión.

$$F_T = -G\frac{M_L m}{r^2}i$$

Donde: F_T es la fuerza de atracción que la Luna ejerce en el centro de la Tierra, G la constante de gravitación universal ($6.67 \cdot 10^{-11}$), M_L la masa de la Luna ($7.35 \cdot 10^{22}$ kg), r la distancia media que separa el centro de la Luna y el centro de la Tierra ($384.4 \cdot 10^6$ metros), i representa el vector unitario, por lo que, para fines de cálculos en términos absolutos no altera la expresión, solo indica la dirección en la que se efectúa la atracción.

Fuerza de marea en el punto A

En el punto A, la fuerza de atracción que la Luna ejerce sobre un objeto de masa m, de acuerdo con la figura 37, se expresaría correctamente con la ecuación.

$$F_A = -G\frac{M_L m}{(r-R)^2}i$$

$$F_A = -GM_L m\left(\frac{1}{r^2\left(1-\frac{R}{r}\right)^2}\right)i$$

$$F_A = -\frac{GM_L m}{r^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{R}{r}\right)^2}\right)i$$

El factor $\frac{1}{\left(1-\frac{R}{r}\right)^2}$ de la expresión anterior, se puede transformar en una serie de potencias, para ello hagamos que $x=\frac{R}{r}$, por lo tanto podemos escribirla como si fuese $\frac{1}{(1-x)^2}$, la cual se puede expresar como una serie de potencias al diferenciar ambos miembros de la expresión.

$\frac{1}{(1-x)} = 1+x+x^2+x^3+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diferenciando ambos miembros

$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, al sustituir x por su equivalente se tiene

$$\frac{1}{\left(1-\frac{R}{r}\right)^2} = 1+2\left(\frac{R}{r}\right)+3\left(\frac{R}{r}\right)^2+4\left(\frac{R}{r}\right)^3+\ldots$$

Por lo tanto

$$F_A = -\frac{GM_L m}{r^2}\left[1+2\left(\frac{R}{r}\right)+3\left(\frac{R}{r}\right)^2+4\left(\frac{R}{r}\right)^3+\ldots\right]i$$

$$F_A = -\frac{GM_L m}{r^2}i - \frac{2RGM_L m}{r^3}i - \frac{3R^2GM_L m}{r^4}i - \frac{4R^3GM_L m}{r^5}i\ldots$$

Como puede apreciarse, el primer término es la fuerza de atracción gravitacional tradicional y el resto son términos de la fuerza de marea, de éstos el primero es el que se considera el más significativo de todos, por lo que los demás se pueden despreciar y así obtener de manera aproximada la fuerza de atracción gravitacional de la Luna en el punto A.

$$F_A \approx -\frac{GM_L m}{r^2} i - \frac{2RGM_L m}{r^3} i$$

De acuerdo con lo establecido al principio de éste subcapítulo, la fuerza de marea en A se obtiene restando de ésta la fuerza de marea en el centro de la Tierra, matemáticamente a continuación se muestra el procedimiento respectivo.

$$f_A = F_A - F_T \approx -G\frac{M_L m}{r^2} i - G\frac{2RM_L m}{r^3} i + \frac{GM_L m}{r^2} i$$

$$f_A \approx -\frac{2GRM_L m}{r^3} i$$

Fuerza de marea en el punto B

En el punto B, la fuerza de atracción ejercida por la Luna **F_B**, de acuerdo con la figura 37 quedaría expresada correctamente con la siguiente expresión

$$F_B = -\frac{GM_L m}{(r+R)^2} i$$

$$F_B = -\frac{GM_L m}{r^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{R}{r}\right)^2}\right) i$$

Haciendo $x=\frac{R}{r}$, el último factor se puede expresar como $\frac{1}{(1+x)^2}$ por lo que puede expresarse como una serie de potencias, empleando para ello la serie binomial con K = -2. El coeficiente binomial es

$$\binom{-2}{n}=\frac{(-2)(-3)(-4)...(-2-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^n 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot n(n+1)}{n!}=(-1)^n(n+1)$$

Y así, cuando $|x|<1$, se tiene

$$\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$$

Sustituyendo x por su equivalente en la expresión anterior se tiene

$$\frac{1}{\left(1+\frac{R}{r}\right)^2}=\left(1+\frac{R}{r}\right)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^n$$

Por lo tanto,

$$F_B=-\frac{GM_L m}{r^2}\left(\frac{1}{(1+R)^2}\right)i=-\frac{GM_L m}{r^2}\left[1-\frac{2R}{r}+\left(\frac{3R}{r}\right)^2-\left(\frac{4R}{r}\right)^3+...\right]i=$$

$$F_B=-\frac{GM_L m}{r^2}i+\frac{2GM_L mR}{r^3}i-\frac{3GM_L mR^2}{r^4}i...$$

Por las mismas razones que en F_A solo se consideran los dos primeros términos, por lo que

$$F_B\approx-\frac{GM_L m}{r^2}i+\frac{2GM_L mR}{r^3}i$$

Por lo tanto

$$f_B = F_B - F_T \approx -\frac{GM_L m}{r^2} i + \frac{2GM_L mR}{r^3} i + \frac{GM_L m}{r^2} i$$

$$f_B \approx \frac{2GM_L mR}{r^3} i$$

Como puede verse, la fuerza de atracción de la Luna es igual en el punto A que en el punto B.

Fuerza de marea en el punto C

En el punto C, si observamos la figura 37, nos damos cuenta que entre la Luna (L), el Centro de la Tierra (T) y el punto C se forma un triángulo rectángulo, en donde el lado LT es igual a r, el lado TC es igual a R, por lo tanto la distancia entre la Luna y el punto C, por el teorema de Pitágoras es $LC = \sqrt{r^2 + R^2}$. El ángulo α si lo calculamos resulta ser de 0.016569763 rad, menos de un grado sexagesimal, por lo que el cos(0.016569763) ≈ 1, por otra parte el sen (α) ≈ tan (α) dado la gran diferencia entre r y R, por lo que podemos aproximar el sen(α) $\approx \frac{R}{r}$ por lo tanto, la fuerza de atracción de la Luna en el punto C es aproximadamente igual a la siguiente expresión.

$$F_C \approx -\frac{GM_L m}{\left(\sqrt{r^2 + R^2}\right)^2} (\cos\alpha_i + sen\alpha_j) \approx -\frac{GM_L m}{r^2 + R^2}(1 + \frac{R}{r}) \approx -\frac{GM_L m}{r^2 + R^2} + \frac{GM_L mR}{\left(r^2 + R^2\right)r}$$

Como r y R son muy diferentes, al elevarlos al cuadrado cada uno y sumarlos, proporcionalmente la diferencia es menos perceptible, por los que con fines prácticos se puede establecer que $r^2 \approx r^2 + R^2$ simplificándose la expresión anterior a la siguiente.

$$F_C = -\frac{GM_L m}{r^2} + \frac{GM_L mR}{r^3}$$

Por lo tanto

$$f_C = F_C - F_T \approx -\frac{GM_L m}{r^2} + \frac{GM_L mR}{r^3} + \frac{GM_L m}{r^2}$$

$$f_C = \frac{GM_L mR}{r^3}$$

Lo cual representa aproximadamente la mitad de la fuerza de marea con respecto a los puntos A y B, los cuales se encuentran perpendicular a él.

El procedimiento para calcular la fuerza de marea provocada por el Sol, sería muy similar al expuesto para la fuerza de marea provocada por la Luna y el resultado sería también muy similar, simplemente en las expresiones anteriores se sustituiría M_L por M_S donde ésta última representaría la masa del Sol ($1.98 \cdot 10^{30}$ kg), y r se sustituiría por la distancia media entre el centro del Sol y el centro de la Tierra ($149.6 \cdot 10^9$).

Fuerza de marea en cualquier punto P

Una vez calculada la fuerza de marea provocado por la atracción gravitatoria de la Luna en los puntos A, B y C, a continuación se calcula dicha fuerza atractiva en cualquier punto P de la Tierra. Para ello se parte de la figura 40.

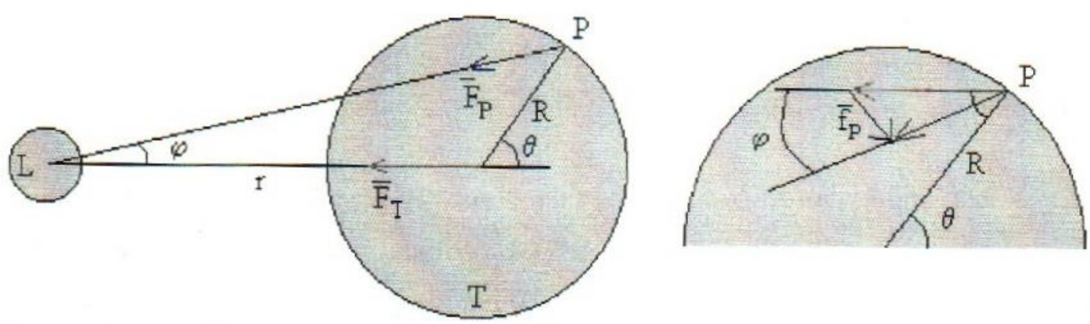


Figura 40. Esquema que representa la atracción lunar en cualquier punto de la Tierra

La fuerza que ejerce la Luna sobre un objeto de masa *m* situado en el punto P distante r_P del centro de la Luna, de acuerdo con la ley de gravitacional universal se puede expresar matemáticamente a través de la siguiente ecuación.

$$F_p = G\frac{Mm}{r_p^2}$$

La fuerza de marea en P es la diferencia entre la fuerza de atracción gravitacional de la Luna en el punto P (F_P) y la que ejerce la Luna en el centro de nuestro planeta (F_T), vectorialmente se expresa: $\mathbf{f_P}=\mathbf{F_P}-\mathbf{F_T}$.

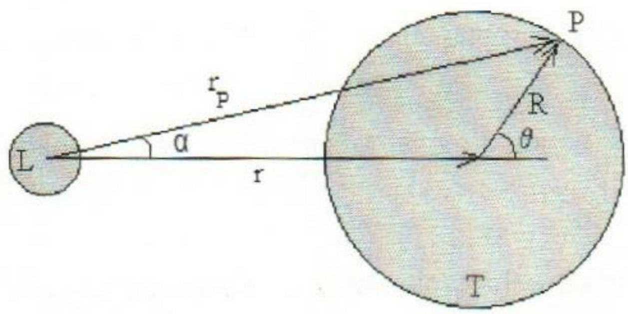


Figura 41. Representación vectorial de la fuerza de atracción de la Luna hacia el punto P

De acuerdo con la figura anterior, se definen los siguientes vectores:

$\mathbf{r_p}$ el vector con origen en el centro de la Luna y extremo en el punto P

r el vector con origen en la Luna y extremo en el centro de la Tierra

R el vector con origen en el centro de la Tierra y extremo en el punto P

$\mathbf{r_p = r + R}$

Siguiendo un procedimiento análogo al realizado para calcular la fuerza de marea en los puntos A y B del presente subcapítulo se obtiene la fuerza de marea para el punto P. Con la finalidad de ahorrar simbolismos, se considera M como la masa de la Luna y cuando se requiera calcular la fuerza de atracción solar, simplemente en la fórmula se sustituirán sus datos respectivos.

$$r_p^2 = (\mathbf{r}+\mathbf{R})^2 = r^2 + R^2 + 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{R} \approx r^2\left(1+\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}}{r^2}\right)$$

$$\mathbf{f}_P \approx -\frac{GMm}{r^3}\left((\mathbf{r}+\mathbf{R})\left(1+\frac{2\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}-\mathbf{r}\right) \approx -\frac{GMm}{r^3}\left((\mathbf{r}+\mathbf{R})\left(1-\frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}}{r^2}\right)-\mathbf{r}\right) \approx$$
$$-\frac{GMm}{r^3}\left(\mathbf{R}-\mathbf{r}\,\frac{3\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}}{r^2}\right)$$

- Para $\theta=0$, los vectores **r** y **R** tienen la misma dirección y sentido, por lo que se obtiene $\mathbf{f_B}$
- Para $\theta=\pi/2$ los vectores **r** y **R** son perpendiculares, el producto escalar es cero, convirtiéndose en $\mathbf{f_C}$
- Para $\theta=\pi$, los vectores **r** y **R** tienen la misma dirección, pero sentido opuesto, dando como resultado $\mathbf{f_A}$.

Como se aprecia en la figura 39, parte derecha, solamente se tiene que calcular las fuerzas de marea en la mitad de la Tierra por encima del eje que une el centro de la Tierra y el centro de la Luna. Los puntos de la Tierra simétricos, por debajo de dicho eje, tienen fuerzas de marea iguales y de sentido contrario.

Otro de los parámetros importantes de calcular en las mareas, son sus componentes radial (f_R) y tangencial (f_t).

Para calcular la componente radial de la fuerza de marea, se realiza el producto escalar $\mathbf{f_P}\cdot\mathbf{R}=f_R\cdot R$, donde f_R es la componente radial de la fuerza de marea, obteniéndose la expresión siguiente.

$$f_R = \frac{GMm}{r^3}R(3\cos^2\theta - 1)$$

La componente radial es cero, para $\theta=0$, punto B, $\theta=90°$ punto C, $\theta=180°$ punto A.

La componente tangencial f_t se calcula mediante el módulo del producto vectorial $|\mathbf{f_P}\mathbf{x}\mathbf{R}|=f_t\cdot R$, el cual da como resultado la siguiente expresión.

$$f_t = -3\frac{GMm}{r^3}R\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

La componente radial es máxima, para θ=0, punto B, θ=180º punto A. Es mínima, para θ=90º, punto C.

A continuación se realizan a manera de ejemplo, algunos cálculos como la fuerza de atracción de la Tierra sobre cualquier objeto en su superficie, la de la Luna y el Sol con respecto al centro de masas (c.m.) de la Tierra y la fuerza de marea para algunos puntos específicos de objetos de masa m sobre la superficie terrestre, para ello se toman en cuenta los siguientes parámetros.

- Masa de la Luna M=7.35·10^{22} kg
- Distancia media entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna r=384.4·10^{6} m
- Masa del Sol M=1.98·10^{30} kg
- Distancia media entre el centro de la Tierra y el centro del Sol r=149.6·10^{9} m
- Radio de la Tierra R=6.37·10^{6} m
- Constante de gravitación universal G=6.67·10^{-11} Nm^{2}/kg^{2}

La fuerza de atracción que ejerce la Tierra (F_T) sobre un objeto de masa m situado en su superficie es

$$F_T = \frac{GM_T m}{R^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \cdot m}{\left(6.37 \cdot 10^{6}\right)^2} = 9.83 \cdot m \text{ N}$$

El Sol está muy alejado de la Tierra, pero tiene una masa enorme. La Luna está cercana a la Tierra pero su masa es relativamente pequeña. La fuerza de atracción que ejerce el Sol sobre el c.m. de la Tierra es mayor que la fuerza que ejerce la Luna sobre el c.m. de la Tierra, a continuación se realizan los cálculos respectivos.

$$F_L = \frac{GM_L m}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.35 \cdot 10^{22} \cdot m}{\left(384.4 \cdot 10^{6}\right)^2} = 3.32 \cdot 10^{-3} \cdot m \text{ N}$$

$$F_S = \frac{GM_S m}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.98 \cdot 10^{30} \cdot m}{\left(149.6 \cdot 10^9\right)^2} = 5.90 \cdot 10^{-3} \cdot m \text{ N}$$

Podemos observar de los cálculos anteriores, que la fuerza de atracción solar es alrededor del 78% mayor que la fuerza de atracción lunar sobre el c.m. de la Tierra.

De acuerdo con las expresiones calculadas previamente, el valor máximo de las fuerzas de marea se obtienen en los puntos A y B de la figura 37, sus valores numéricos a continuación se calculan.

Fuerzas de marea máximas debidas a la Luna

$$f_L = \frac{2GM_L Rm}{r^3} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 7.35 \cdot 10^{22} \cdot 6.37 \cdot 10^6 \cdot m}{\left(384.4 \cdot 10^6\right)^3} = 1.09959426 \cdot 10^{-6} \cdot m \text{ N}$$

Fuerzas de mareas máximas debidas al Sol

$$f_S = \frac{2GM_S Rm}{r^3} = \frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 1.98 \cdot 10^{30} \cdot 6.37 \cdot 10^6 \cdot m}{\left(149.6 \cdot 10^9\right)^3} = 5.025342562 \cdot 10^{-7} \cdot m$$

Aquí podemos apreciar que la fuerza de marea lunar es mucho mayor que la solar, siendo el cociente entre estas dos fuerzas de f_L/f_S=2.188098118

Estas cifras nos indican que, las fuerzas de marea son muy pequeñas comparadas con la fuerza de atracción de la Tierra 9.83·m N sobre un objeto de masa m situado en su superficie, pero sus efectos son notables.

La fuerza de atracción del Sol sobre el c.m. de la Tierra es mayor que la fuerza de atracción de la Luna, a pesar de que ésta está muy próxima a la Tierra. Sin embargo, la fuerza de marea producida por el Sol es más pequeña que la producida por la Luna.

Elevación de la capa de agua

El siguiente paso consiste en calcular la energía potencial correspondiente a la fuerza de marea $\mathbf{f_P}$, cuya demostración se omite, por razones de dificultad matemática, pero que puede consultarse en el artículo *On the generation of tides* de Kapoulitsas.

La forma S_0 de la superficie debido a la fuerza de atracción de la Tierra y a su rotación es la de un esferoide de revolución alrededor del eje polar.

La fuerza centrípeta, debida a la rotación de la Tierra alrededor de su eje, que es una fuerza independiente del tiempo, no añade nada a las fuerzas de marea.

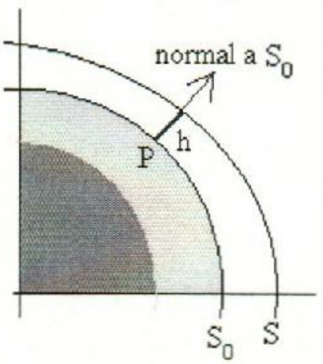


Figura 42. Representación de la superficie del mar por la atracción del Sol o la Luna

El efecto del cuerpo perturbador (Sol, Luna o ambos) es el de distorsionar ligeramente la superficie S_0, para dar lugar a una nueva superficie S, donde S es una superficie equipotencial perpendicular a la resultante de todas las fuerzas, incluidas las de marea, que actúan en P.

Teniendo en cuenta, que el volumen de agua que cubre la Tierra permanece constante, se determina la elevación *h* del punto P de la superficie S_0 debida exclusivamente a las fuerzas de atracción del cuerpo perturbador, representándose ésta por la expresión.

$$h = \frac{M}{2M_T}\left(\frac{R}{r}\right)^3 R(3\cos^2\theta - 1)$$

donde M es la masa del cuerpo perturbador, M_T es la masa de la Tierra en Kg, R el radio terrestre, r la distancia entre el centro de la Tierra y el centro del cuerpo perturbador.

La máxima elevación corresponde al ángulo θ=0º o θ=π, cuando el cuerpo perturbador está delante o detrás de la Tierra, (puntos A y B de la figura 37) donde son máximas las fuerzas de marea.

La mínima elevación corresponde al ángulo θ=π/2, (punto C de la figura 37). La máxima elevación es el doble en valor absoluto, de la mínima elevación. De modo que, la diferencia entre altura máxima de la bajamar y la pleamar se expresa ecuacionalmente de la siguiente forma.

$$\Delta h_{max} = 3\frac{M}{2M_T}\left(\frac{R}{r}\right)^3 R$$

Teniendo en cuenta los parámetros ya proporcionados, a continuación se calcular las elevaciones máximas de las aguas marinas provocadas por la Luna y el Sol.

Para las mareas lunares se tiene

$$\Delta h_{max} = 3\frac{7.35\cdot10^{22}}{2\cdot5.98\cdot10^{24}}\frac{(6.37\cdot10^6)^4}{(384.4\cdot10^6)^3} = 53.4\ \text{cm}$$

Para las mareas producidas por el Sol

$$\Delta h_{max} = 3\frac{1.98\cdot10^{30}}{2\cdot5.98\cdot10^{24}}\frac{(6.37\cdot10^6)^4}{(149.6.4\cdot10^9)^3} = 24.4\ \text{cm}$$

Rotación de la Tierra

Hasta aquí se ha supuesto que la Tierra está fija, sin embargo, esta no es la situación real. La Tierra se mueve respecto de su eje con un periodo P de 24 horas. Por lo tanto la velocidad angular de rotación es $\omega=2\pi/P$. Lo anterior también afecta a la marea, por ello, es necesario realizar un análisis tomando en cuenta la latitud de la 'Tierra.

Elevación de la marea en función de la latitud

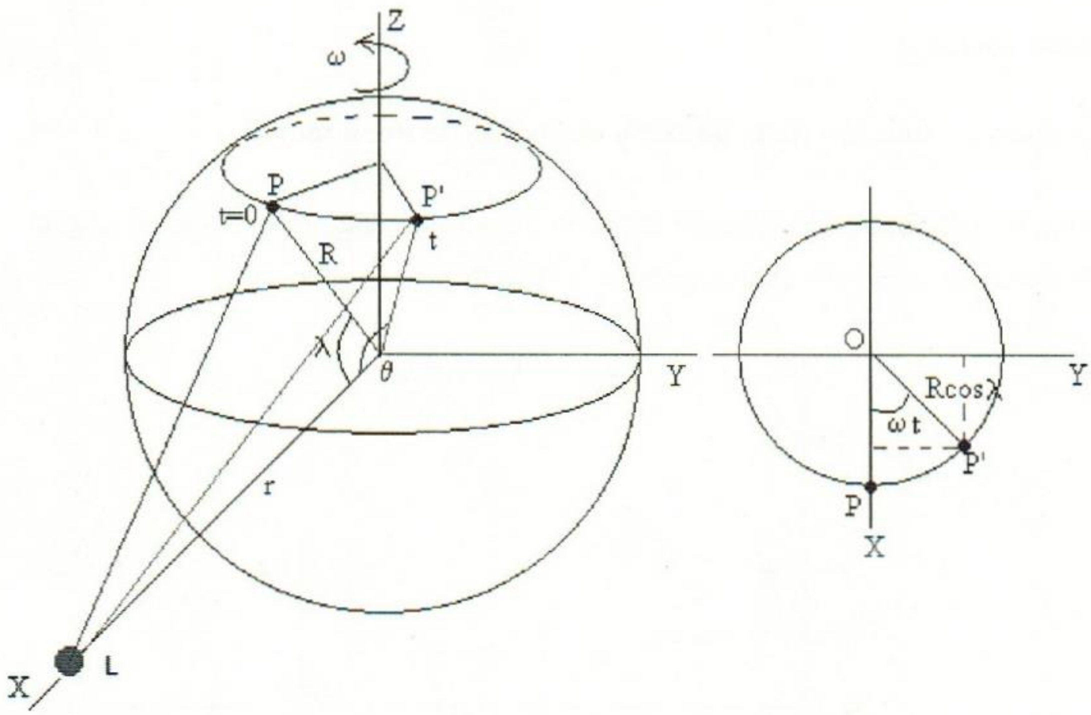


Figura 43. Representación tridimensional de la Tierra en rotación

El análisis se inicia suponiendo que partimos en el instante t=0, con el punto P sobre la superficie de la Tierra a una latitud λ, y el cuerpo perturbador L (Luna) están en el plano XZ. Al cabo de un cierto tiempo t, debido a la rotación de la Tierra, el punto P se habrá desplazado a la posición P', el ángulo OPP' es ωt como se aprecia en la figura 43, parte derecha.

El ángulo θ, formado por la recta que une el centro de la Tierra con el punto P' y el centro de la Tierra con el centro del cuerpo perturbador o bien, por el vector **R** y el vector **r**, se puede calcular por medio del producto escalar.

$\mathbf{r}=r\,\mathbf{i}$

$\mathbf{R}=R\cos(\lambda)\cdot\cos(\omega t)\cdot\mathbf{i}+R\cos(\lambda)\cdot\mathrm{sen}(\omega t)\cdot\mathbf{j}+R\mathrm{sen}(\lambda\cdot\mathbf{k})$

El producto escalar vale

$\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}=R\cdot r\cos(\theta)=R\cdot r\cos(\lambda)\cos(\omega t)$

$\cos\theta=\cos\lambda\cdot\cos(\omega t)$

La elevación en función de la latitud y el ángulo de declinación

Si el cuerpo perturbador no está en el plano ecuatorial, sino que forma un ángulo δ, de declinación con dicho plano, como lo indica la siguiente figura.

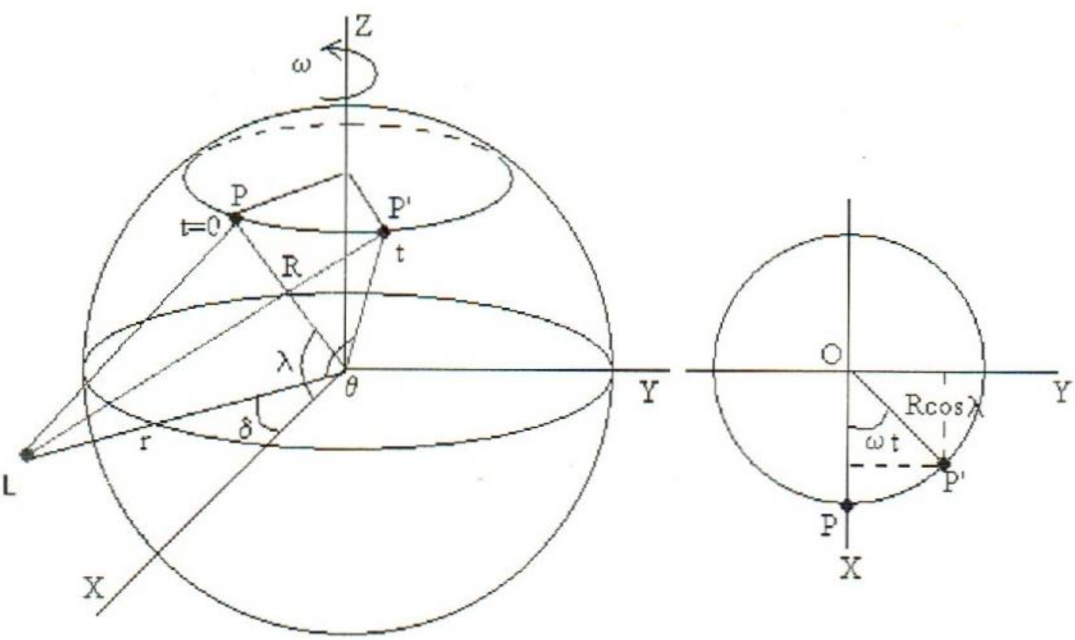


Figura 44. Esquema en donde el cuerpo perturbador L se encuentra desplazado un ángulo δ

De acuerdo la figura anterior, el vector **r** se puede escribir de la siguiente manera.

$\mathbf{r}=r\cos\delta\cdot\mathbf{i}+r\mathrm{sen}\delta\cdot\mathbf{k}$

El producto escalar se expresa

$\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}=R\cdot r\cos\theta=R\cdot r\cos\lambda\cos(\omega t)\cos\delta+Rr\mathrm{sen}\lambda\, r\mathrm{sen}\delta$

El coseno de θ a su vez puede escribirse

$\cos\theta=\cos\lambda\cos(\omega t)\cos\delta+\mathrm{sen}\lambda\, r\mathrm{sen}\delta$

Finalmente, si P no parte del plano XZ (meridiano de Greenwich) sino de una meridiano inicial φ. La fórmula se convierte en

$\cos\theta=\cos\lambda\cos(\omega t+\varphi)\cos\delta+\mathrm{sen}\lambda\, r\mathrm{sen}\delta$

Introduciendo $\cos\theta$ en la expresión de la elevación del agua, y teniendo en cuenta las identidades trigonométricas $\cos 2\beta=2\cos^2\beta-1$, $\mathrm{sen}^2\beta+\cos^2\beta=1$, $\mathrm{sen}2\beta=2\mathrm{sen}\beta\cos\beta$, se llega al siguiente resultado.

$$h=\frac{MR^4}{2M_T r^3}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\mathrm{sen}\,2\delta\cdot\mathrm{sen}\,2\lambda\cos(\omega t+\varphi)+\\ \frac{3}{2}\cos^2\delta\cos^2\lambda\cos(2\omega t+2\varphi)+\\ \frac{1}{2}(3\mathrm{sen}^2\lambda-1)(3\mathrm{sen}^2\delta-1)\end{pmatrix}$$

- El primer sumando, depende armónicamente de ωt, y completa un periodo de oscilación cuando $\omega t=2\pi$, es decir, cuando la Tierra da una vuelta completa. Estas son las mareas diurnas, lunares o solares según que M y r sean, respectivamente, los datos de la masa de la Luna y su distancia al centro del la Tierra, o los datos relativos al Sol. En el ecuador estas mareas desaparecen ya que la latitud $\lambda=0$. En cambio, se hacen grandes para latitudes de $\lambda=45°$.

- El segundo sumando, depende armónicamente de $2\omega t$, por tanto, cada 12 horas se produce un ciclo de marea. Su amplitud se hace nula en los polos λ=90º, y son máximas en el ecuador λ=0º.
- El tercer sumando, no depende del tiempo, y se anula para aquellas latitudes tales que $sen^2\lambda=1/3$, $\lambda\approx35°$, y tiene su máximo valor en los polos. Finalmente, depende del ángulo de declinación δ que a su vez depende del movimiento de la Luna y del Sol.

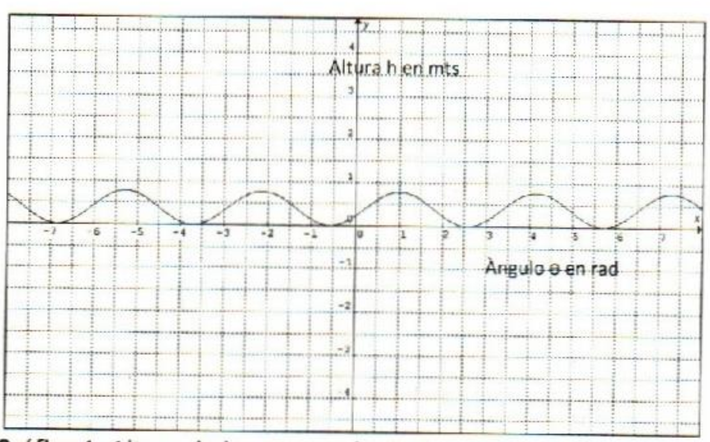
Mareas producidas por el Sol y la Luna

Cuando consideramos los efectos combinado de la de la Luna y del Sol, la elevación de la marea se obtiene sumando las elevaciones debidas cada uno de ellos.

$$h = \frac{M_L}{2M_T}\left(\frac{R}{r_L}\right)^3 R(3\cos^2\theta - 1) + \frac{M_S}{2M_T}\left(\frac{R}{r_S}\right)^3 R(3\cos^2\theta - 1)$$

La máxima diferencia de nivel entre la marea baja y pleamar es de 53.4+24.4=77.8 cm. Cuando los dos cuerpos celestes están en conjunción, es decir, alineados con la Tierra que sucede cuando se da la Luna Llena y novilunio, entonces se produce la máxima elevación, y cuando están en cuadratura, lo cual ocurre en el Cuarto Menguante y el Cuarto Creciente se producen la mínima elevación.

La función anterior gráficamente se presenta en la gráfica 1



Gráfica 1. Altura de las mareas lunisolares expresadas en metros

4.4.2 Modelación de las mareas a través de la función coseno.

Partiendo de la figura 39 y teniendo en cuenta la ley de la gravitación universal, iniciamos calculando la fuerza con que la Luna atraería una partícula de masa m ubicada en los puntos A, B y C sobre la superficie de la Tierra, si suponemos que la Luna y la Tierra se mantienen fijas y la variación en la distancia se debe a la ubicación de los puntos mencionados.

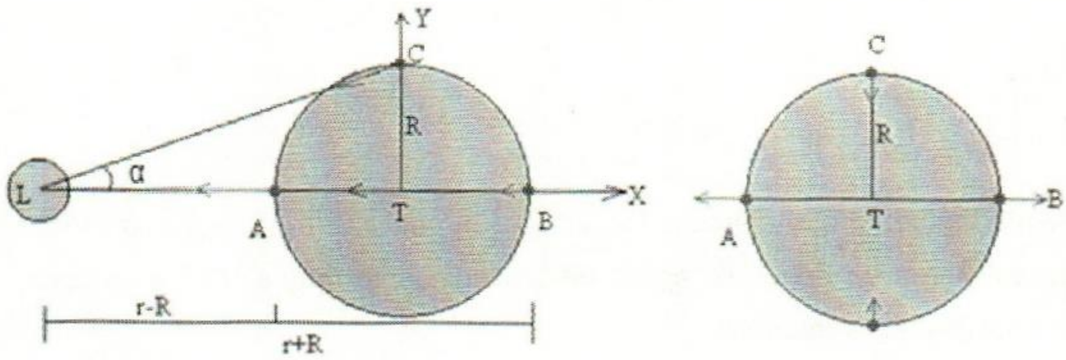


Figura 39. Representación vectorial de las fuerzas de marea provocadas por la Luna sobre posiciones extremas en la superficie de la Tierra (se repite con fines didácticos)

La fuerza de atracción que la Luna ejerce sobre el centro de la Tierra (F_T) se calcula aplicando la ley de gravitación universal y los datos que se representan en la figura 39.

$$F_T = -G\frac{M_L m}{r^2}i$$

Donde: M_L = masa de la Luna y G = constante de gravitación universal.

Para calcular la fuerza de atracción lunar sobre el punto A, simplemente sustituimos r por su equivalente (figura 39), que corresponde a (r –R), quedando de la siguiente manera:

$$F_A = -G\frac{M_L m}{(r-R)^2}i$$

Para calcular la fuerza de marea en A, simplemente se resta F_T de F_A como se muestra a continuación.

$$f_A = F_A - F_T = -\frac{GMm}{(r-R)^2}i + \frac{GMm}{r^2}i = -GMm\left[\frac{1}{(r-R)^2} - \frac{1}{r^2}\right]i$$

$$f_A = -GMm\left[\frac{r^2 - (r^2 - 2rR + R^2)}{r^2(r-R)^2}\right]i$$

$$f_A = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{R^2 - 2rR}{(r-R)^2}\right]i$$

Para calcular la fuerza que ejerce la Luna sobre el punto B (F_B) y luego encontrar la fuerza de marea en B (f_B), se aplica un procedimiento muy similar al anterior, como se muestra a continuación.

$$F_B = -\frac{GMm}{(r+R)^2}i$$

$$f_B = -\frac{GMm}{(r+R)^2}i + \frac{GMm}{r^2}i$$

$$f_B = -GMm\left[\frac{1}{(r+R)^2} - \frac{1}{r^2}\right]i$$

$$f_B = -GMm\left[\frac{r^2 - r^2 - 2rR - R^2}{r^2(r+R)^2}\right]i$$

$$f_B = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{R^2 + 2rR}{(r+R)^2}\right]i$$

Para calcular la fuerza de atracción que la Luna ejerce sobre el punto C (F_C) y luego calcular la fuerza de marea en dicho punto (f_C) se procede de manera muy similar a los dos casos anteriores.

$$F_C = -\frac{GMm}{r^2 + R^2} i$$

$$f_C = -\frac{GMm}{r^2 + R^2} i + \frac{GMm}{r^2}$$

$$f_C = -GMm\left[\frac{1}{r^2 + R^2} - \frac{1}{r^2}\right] i$$

$$f_C = -GMm\left[\frac{r^2 - r^2 - R^2}{r^2\left(r^2 + R^2\right)}\right] i$$

$$f_C = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{R^2}{\left(r^2 + R^2\right)}\right] i$$

La fuerza de marea en cualquier punto P del ecuador de la Tierra

Para calcular la fuerza de marea que la Luna ejerce en cualquier punto del ecuador terrestre, si consideramos que la Tierra rota y la Luna se mantiene a la misma distancia, partimos de la figura 41, dicha figura también se encuentra en el subcapítulo anterior.

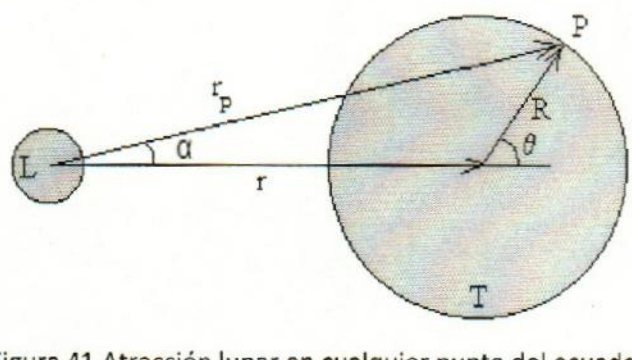


Figura 41.Atracción lunar en cualquier punto del ecuador de la Tierra

La fuerza con que la Luna atrae a una partícula de masa m situada en cualquier parte del ecuador de la Tierra, de acuerdo con la figura precedente se lograría a través de la siguiente ecuación.

$$F_p = -\frac{GMm}{r_P^2}i$$

Pero r_P^2 es variable, ya que la Tierra al rotar va cambiando la posición de dicha partícula, por lo que se puede calcular aplicando la ley de cosenos, puesto que se conocen dos de sus lados (r y R) y el ángulo comprendido entre ellos ($\pi - \theta$)

$$r_P^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos(\pi - \theta)$$

Sustituyendo r_P^2 por su equivalente en la ecuación anterior, se obtiene.

$$F_p = -\frac{GMm}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\pi - \theta)}i$$

Si a dicha expresión le restamos F_T obtendremos la fuerza de marea para cualquier punto situado sobre el ecuador de la Tierra.

$$f_p = -\frac{GMm}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\pi - \theta)}i + \frac{GMm}{r^2}i$$

$$f_p = -GMm\left[\frac{1}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\pi - \theta)} - \frac{1}{r^2}\right]i$$

$$f_p = -GMm\left[\frac{r^2 - r^2 - R^2 + 2rR\cos(\pi - \theta)}{r^2\left(r^2 + R^2 - 2rR\cos(\pi - \theta)\right)}\right]i$$

$$f_p = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{R^2 - 2rR\cos(\pi - \theta)}{\left(r^2 + R^2 - 2rR\cos(\pi - \theta)\right)}\right]i$$

Se puede ver que la expresión anterior es totalmente congruente con las encontradas para calcular la fuerza de marea en los puntos A, B y C. En el punto A el ángulo θ es de 180º en el sistema sexagesimal o expresado en radianes es igual a π rad. por lo que se tendría el coseno de cero que es igual a uno, convirtiéndose la expresión anterior en

$$f_p = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{R^2 - 2rR}{(r-R)^2}\right]i$$

Que es exactamente igual a f_A, si se sustituyen los valores respectivos de cada una de la literales se obtiene.

$f_A = -1.127543463(10^{-6})$

Cuando la partícula de masa m se encuentra en el punto B, el ángulo θ es cero, por lo que el coseno de 180° sexagesimales o bien el de π rad, es igual a -1, por lo que se obtiene

$$f_p = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{R^2 + 2rR}{(r+R)^2}\right]i$$

Que es exactamente igual que F_B, al sustituir sus valores respectivos se llega al siguiente resultado.

$f_B = 1.072853381(10^{-6})$

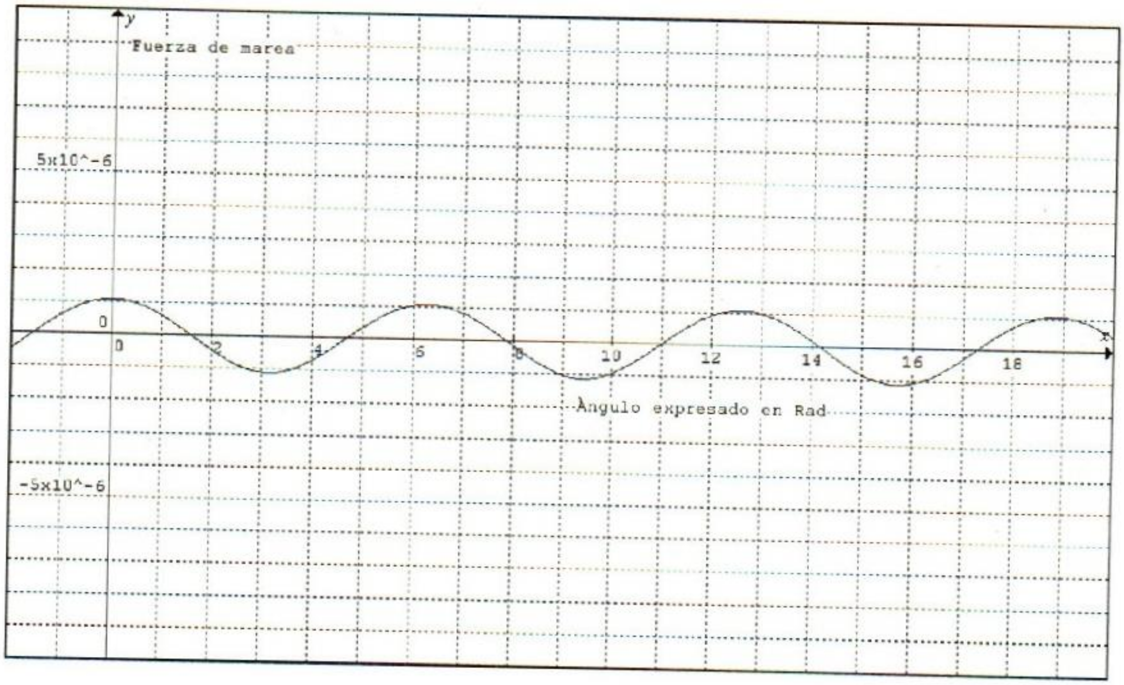
En el caso de que la partícula de masa m se encontrara en el punto C, el ángulo θ sería de 90° sexagesimales o bien $\pi/2$ rad. por lo que el coseno tiene un valor de cero y la expresión f_P se expresa.

$$f_p = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{R^2}{r^2 + R^2}\right]i$$

Que es exactamente igual a f_C, al sustituir sus valores respectivos se obtiene.

$f_C = 9.108340919(10^{-9})$

Al graficar la expresión $f_p = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{R^2 - 2rR\cos(\pi-\theta)}{\left(r^2 + R^2 - 2rR\cos(\pi-\theta)\right)}\right]i$ que representa la fuerza de marea en cualquier punto P, se tiene la gráfica 2.



Grafica 2. Fuerza de marea lunar sobre el ecuador de la Tierra

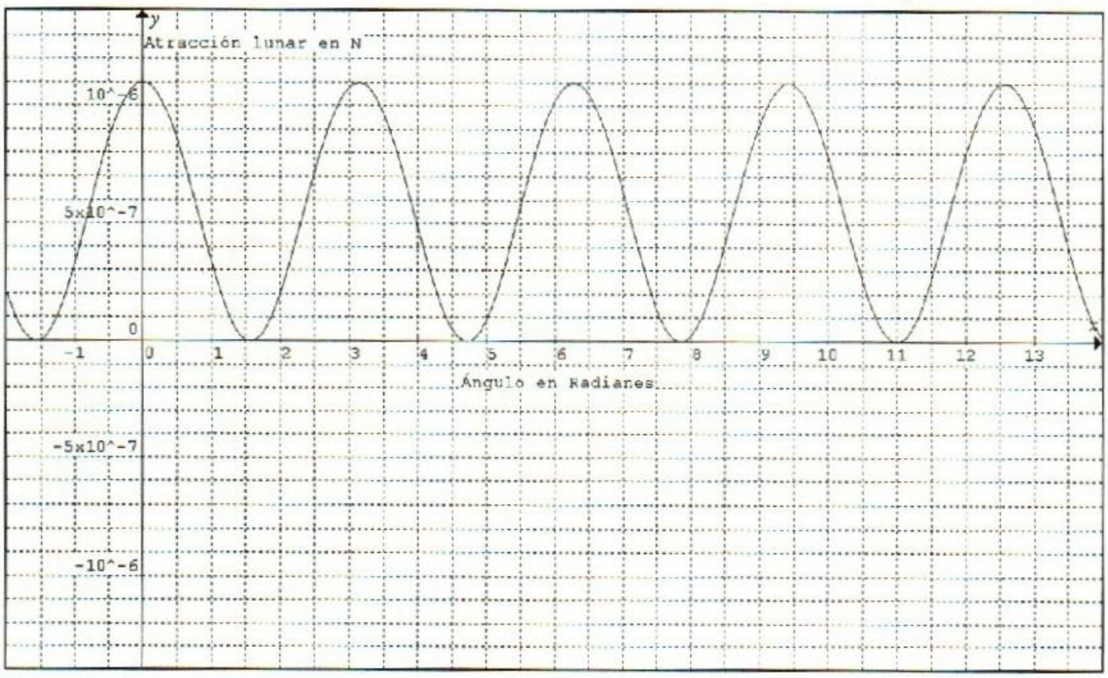
Como se puede observar en dicha gráfica, la función no modela correctamente las fuerzas de marea provocadas por la Luna, ya que cuando θ es cero, la marea es la más alta (punto B) y es correcto, pero cuando $\theta = \pi$ también debería ser máxima (punto A), pero como su valor es negativo la gráfica lo presenta como un mínimo, para el caso de que θ = 90º (punto C), la marea debería ser mínima, de acuerdo al valor calculado muy cercana a cero en la escala de la gráfica y precisamente se ve que la gráfica corta en dicho valor el eje horizontal, cuando debería ser un mínimo y luego iniciar el ascenso. Lo anterior se debe a que el vector unitario (i) cambia de dirección y como en los cálculos realizados no se tomó en cuenta dicha situación provocó que se presente tal situación.

Para corregir la inconsistencia descrita en el párrafo anterior, simplemente se hace uso de las propiedades de la función coseno. Como lo que se requiere es que la función rebote al alcanzar el ángulo θ los 90º, en lugar de continuar disminuyendo, y luego ascienda hasta alcanzar un máximo cuando θ sea igual a 180º y nuevamente disminuya hasta alcanzar un nuevo mínimo cuando θ = 270º, rebote nuevamente hasta alcanzar otro máximo en 360° y se repita el ciclo indefinidamente, entonces hay que realizar los siguientes ajustes: para reducir el período de la función a la mitad, a la parte de ésta que dice $\cos(\pi-\theta)$ se sustituye por $\cos(\pi-2\theta)$. Lo anterior hace que la altura de la gráfica se duplique, para reducirla a la mitad es necesario dividir a toda la función entre 2 lo que permitirá tener los máximos correctos. Finalmente para hacer que los valores mínimos de las mareas lunares sean iguales a cero y que correspondan a cuando el ángulo θ tome los valores de 90° y 270° se suma una constante k que es igual a la mitad de la máxima variación de la fuerza de marea lunar.

Con lo comentado en el párrafo anterior, la expresión analítica que modela la fuerza de la marea lunar es la siguiente

$$f_p = \frac{GMm}{r^2}\left[\frac{R^2 - 2rR\cos(\pi-2\theta)}{2\left(r^2 + R^2 - 2rR\cos(\pi-2\theta)\right)}\right] + k$$

Al graficar esta ecuación se tiene.



Gráfica 3.Fuerza de atracción lunar en el ecuador terrestre en N

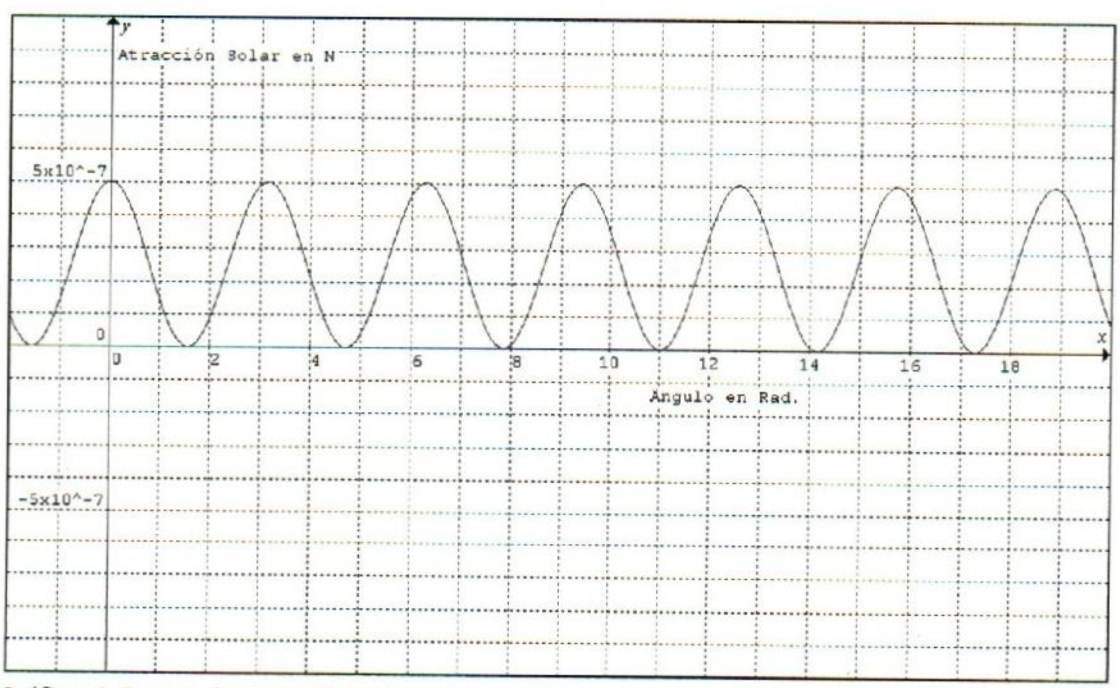
Ahora podemos ver que la fuerza de marea lunar es máxima cuando el ángulo expresado en Radianes es de 0, π, 2π, 3π, ..., $n\pi$ y mínima cuando dicho ángulo toma los valores de $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, ..., $\frac{2n+1}{2}\pi$.

Para el caso de la fuerza de marea provocada por el Sol, el procedimiento para determinar la ecuación que lo represente sería muy similar al realizado para la Luna, por lo que solamente hay que cambiar en la ecuación de la fuerza de marea lunar los datos respectivos, por lo que dicha fuerza de marea se puede expresar con la siguiente función.

$$f_p = \frac{GM_S m}{r^2}\left[\frac{R^2 - 2rR\cos(\pi - 2\theta)}{2\left(r^2 + R^2 - 2rR\cos(\pi - 2\theta)\right)}\right] + k$$

Donde M_S representa la masa del Sol ($1.98*10^{30}$) y r la distancia media entre el centro de la Tierra y el centro del Sol ($149.6*10^9$ mts) y k la mitad de la variación de la fuerza de marea solar.

Al graficarla se obtiene



Gráfica 4. Fuerza de atracción solar sobre un objeto de masa m en el ecuador de la Tierra

Al igual que la gráfica anterior, ésta presenta sus puntos máximos cuando el ángulo toma los valores de 0, π, 2π, 3π, ..., $n\pi$ radianes y sus valores mínimos cuando dicho ángulo toma los valores de $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, ..., $\frac{2n+1}{2}\pi$.

Modelación de las mareas oceánicas por la función coseno

La Luna, en su trayectoria alrededor de la Tierra provoca dos abultamientos de agua: uno en la cara de la Tierra que da hacia ella y otro en el extremo opuesto, como lo muestra la figura 45. En dicha figura, se exagera el abultamiento con fines didácticos y de ninguna manera está hecha a escala. El abultamiento se debe a la atracción gravitacional de nuestro satélite. Como la Luna se va desplazando sobre su trayectoria alrededor de la Tierra, el abultamiento de agua lo va siguiendo en su recorrido. Al girar la Tierra sobre su propio eje cada 24 horas, provoca que ocurran dos mareas altas y dos mareas bajas cada día, como las mareas siguen el ritmo de la Luna, las dos mareas altas y las dos bajas no ocurren en 24 horas, sino que se van retrasando, puesto que al dar un giro la Tierra sobre su propio eje, la Luna ha avanzado sobre su órbita, por ello a la Tierra le lleva en términos medios 24 horas , 48 minutos y 45.78 segundos (24.812716631 horas) volver a quedar en la misma posición respecto a la Luna.

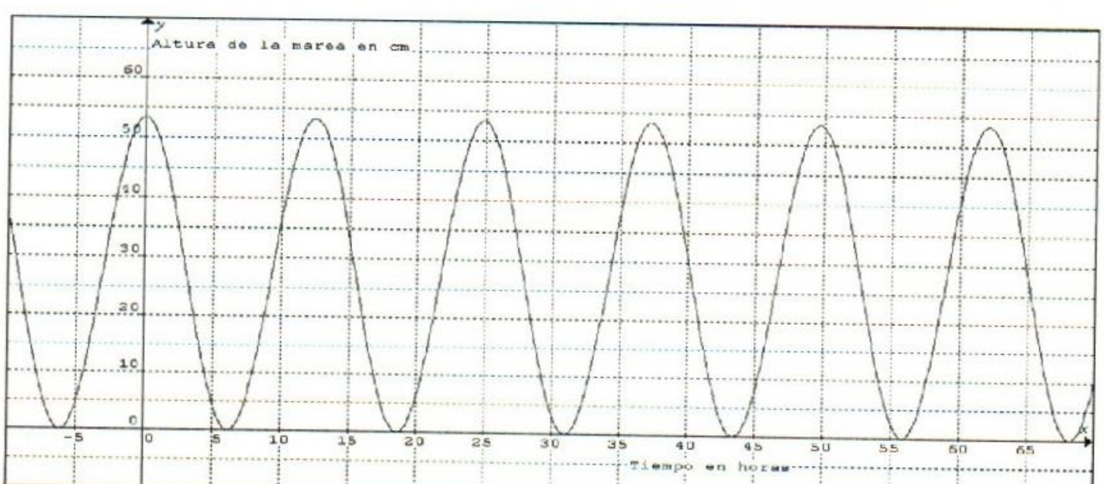
Figura 45. Representación esquemática del abultamiento de agua provocado por la atracción gravitacional de la Luna

La Luna tarda en recorrer su órbita alrededor de la Tierra con respecto a las estrellas 27 días, 07 horas, 43 minutos y 11.5 segundos, es decir, 27.321661 días (período orbital sidéreo), sin embargo, cuando la Luna da una vuelta en torno a la Tierra, ésta se ha desplazado sobre su trayectoria alrededor del Sol, por lo que tardará 29 días, 12 horas, 44 minutos y 2.8 segundos, es decir, 29.530588 días (mes sinódico) para que vuelva a tener la misma posición con respecto a un punto específico de la Tierra, éste período es el que regula las fases lunares.

Tomando en cuenta lo dicho en los párrafos anteriores y el cálculo realizado de la altura máxima de la marea lunar en el subcapítulo precedente, el cual nos dio una altura máxima de 53.4 cm y una mínima de cero cm, la función coseno que modela las mareas deberá tener las siguientes características.

- Partiendo de la función h = cos(x), donde h es la altura de la marea en cm y x representa el tiempo en horas.
- Para que su altura máxima sea de 53.4 cm, deberá tener el cos(x) un coeficiente de la mitad de dicha cantidad, es decir, 26.7 cm y para que la altura mínima sea de cero deberá sumársele también la misma cantidad
- Su período deberá ser de 12.40635832 horas, para ello hay que multiplicar a la x de la función por el cociente $\pi/6.203179158$

Por lo tanto, la función analítica que modela las mareas lunares es $h = 26.7\cos\left(\dfrac{\pi}{6.20317916}x\right) + 26.7$ y su gráfica la siguiente.



Gráfica 5. Altura de las mareas oceánicas en cm provocadas por la Luna en el transcurso del tiempo (horas)

Por lo tanto, si no existiera el Sol y la Luna orbitara alrededor de la Tierra con una órbita totalmente circular, las mareas oceánicas tendrían un comportamiento como el mostrado en la gráfica anterior.

El Sol aunque se encuentra más alejado de la Tierra, alrededor de 400 veces más que la Luna, también es mucho más masivo que ésta, por lo que provoca también dos mareas altas y dos bajas diariamente, solo que el lapso de tiempo entre una pleamar y otra, en promedio es de 12.065709822 horas, ya que al girar la Tierra sobre su propio eje en 24 horas también se desplaza sobre su órbita alrededor del Sol, por lo que tardará en promedio 3 minutos y 56.55 segundos en alcanzar la misma posición que tenía un día anterior respecto al Sol.

La mayoría de los autores coinciden en que las mareas provocadas por el Sol alcanzan una altura máxima de 24.4 cm considerando que las mínimas se encuentran con una altura de cero cm. Por lo dicho en el párrafo anterior y el presente, las mareas solares se pueden modelar con la función coseno considerando lo siguiente:

- Partiendo de la función h = cos (x), donde h es la altura en cm de la marea solar y x es el tiempo en horas.
- Para que su altura máxima sea de 24.4 cm se multiplica a la función coseno por 12.2 cm y para que las mareas mínimas se ubiquen en cero cm se le suma al miembro derecho de la función la misma cantidad.
- El período hay que cambiarlo, para ello debe multiplicarse a la x por $\frac{\pi}{6.03285491}$ y se obtiene la función adecuada.

$$h = 12.2\cos\left(\frac{\pi}{6.03285491}x\right) + 12.2$$

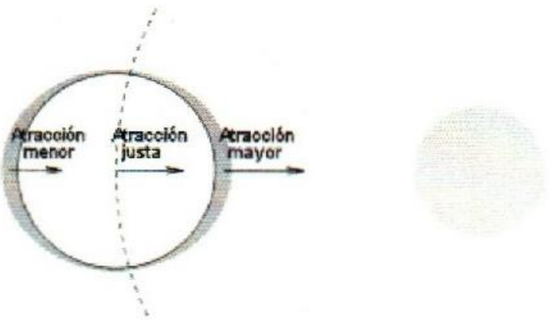
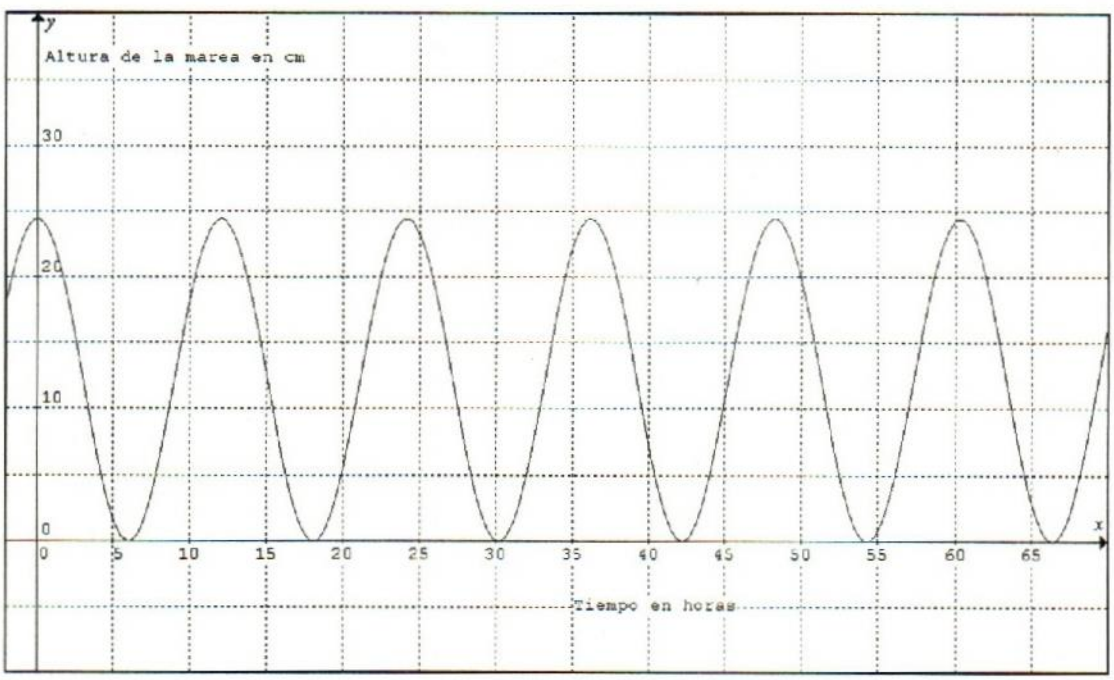


Figura 46. Esquema de las mareas provocadas por el Sol

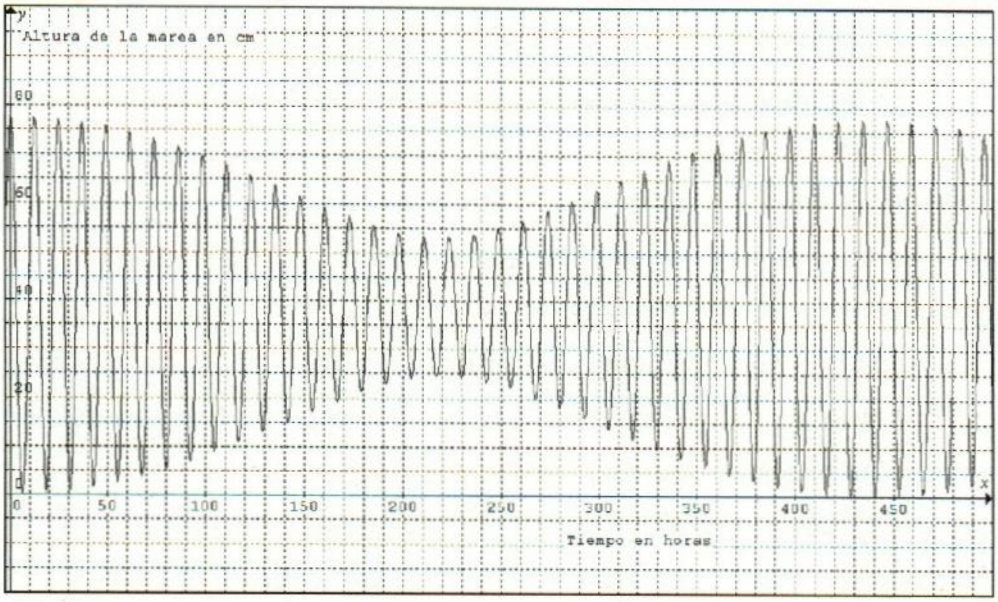
Al graficar la expresión anterior, podemos constatar que cumple perfectamente con todos los valores señalados previamente, dicha gráfica se presenta a continuación.



Gráfica 6. Altura de las mareas solares en cm en el transcurso del tiempo en horas

Las mareas oceánicas son el resultado de la atracción gravitacional conjunta de la Luna y el Sol, si sumamos las dos funciones anteriores se debería obtener la función deseada, veámoslo.

$$h = 26.7\cos\left(\frac{\pi}{6.20317916}x\right) + 12.2\cos\left(\frac{\pi}{6.03285491}x\right) + 38.9$$, cuya gráfica es.



Gráfica 7. Mareas lunisolares expresadas en cm en el transcurso del tiempo en horas

Aparentemente la función anterior modela adecuadamente las mareas oceánicas, sin embargo, si se revisa con mayor detenimiento, se puede apreciar que en la hora cero presenta una marea de sicigia que correspondería a una Luna Nueva o Luna Llena. La siguiente sicigia debería ocurrir en el siguiente plenilunio o novilunio, lo cual en términos medios ocurre en un tiempo de 354.367 horas, sin embargo, en la gráfica observamos que ésta se daría alrededor de 430 horas, lo que constituye una diferencia muy significativa.

La inconsistencia anterior se debe a que la primera función considera un ciclo lunar y la segunda un ciclo solar, pero en un ciclo solar ocurren más de doce ciclos lunares, situación que no considera la expresión anterior, por lo tanto dicha función no modela correctamente las mareas provocadas por los efectos gravitatorios conjuntos de la Luna y el Sol.

Para lograr un buen modelo hay que tomar en cuenta que el movimiento de rotación y traslación de la Tierra alrededor del Sol y el de traslación de la Luna en torno a nuestro planeta, hacen que el ángulo entre la Tierra, la Luna y el Sol varíe continuamente. El movimiento de rotación terrestre hace que en cada revolución del planeta, el ángulo formado por una parte específica de la Tierra, la Luna y el Sol varié de 0º a 360º en un tiempo de 24 horas, 48 minutos y 45.84 segundos, ya que en dicho tiempo la Tierra y su satélite natural vuelven a tomar la misma posición que un día antes, lo que provoca dos mareas altas y dos mareas bajas en el lapso de tiempo descrito. El movimiento de traslación terrestre y lunar hacen que el ángulo entre los tres cuerpos celestes varíe de 0º a 360º en un tiempo de 29.53 días, situación que se puede observar a través de la parte iluminada que vemos en la Luna. Cuando los tres cuerpos celestes se encuentran alineados forman ángulos de 0º (Luna nueva) y 180º (Luna llena), lo cual provoca las mareas de sicigias (las más altas del mes lunar), en cambio, cuando se encuentran en cuadratura forman un ángulo de 90º que corresponde al cuarto creciente y de 270º correspondiente al cuarto menguante, en ambos casos ocurren las mareas más bajas del mes sinódico llamadas bajamares. ¿Pero que tanto son más altas las mareas de sicigias que las máximas de las bajamares?

Para poder responder a la pregunta anterior, partimos de la fuerza de atracción que ejercen la Luna y el Sol, las cuales como ya se ha calculado son: $f_L = 1.09959426 \cdot 10^{-6}$, $f_S = 5.025342562 \cdot 10^{-7}$ porcentualmente si consideramos la fuerza de los dos astros en conjunto, la de la Luna representa el 68.63% y la del Sol el 31.37%, por lo que vectorialmente se tiene:

Cuando se está en la fase de Luna Nueva, tanto la Luna como el Sol se encuentran en el mismo lado de la Tierra, por lo que las fuerzas de atracción se suman, siendo el total del efecto gravitatorio del 100%. El efecto de atracción gravitatoria es igual para la Luna Llena.

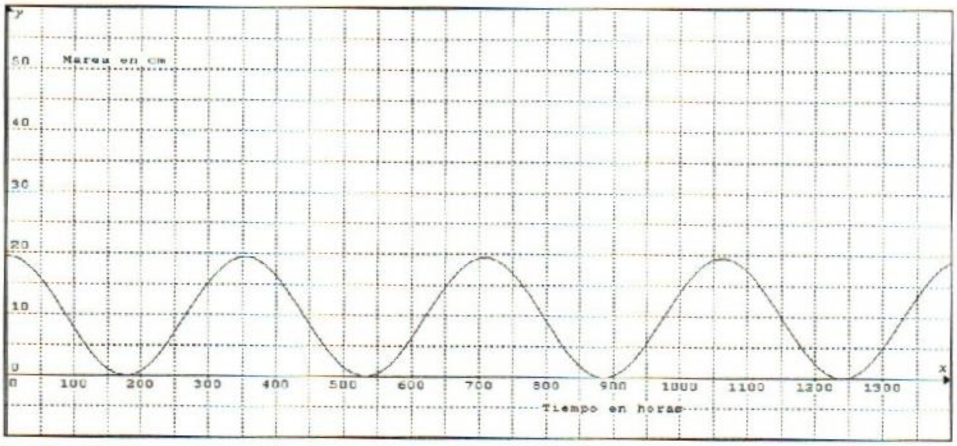
En cambio, cuando se encuentran en cuadratura la atracción de la Luna y la del Sol forman ángulos de 90º, por lo que la fuerza resultante de acuerdo con el teorema de Pitágoras es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las fuerzas de atracción gravitacional de la Luna y el Sol, siendo ésta del 75.46%, que corresponde a los cuartos creciente y menguante de nuestro satélite natural.

Considerando que se vienen manejando datos promedios, se puede considerar en términos redondeados, que las mareas de sicigias son un 25% más elevadas que las mareas más altas de las bajamares. Si consideramos que el mes lunar es divisible en 4 cuartos iguales y que éstos se corresponden con el Cuarto Creciente, Luna Llena, Cuarto Menguante y Luna Nueva de nuestro satélite, entonces se puede modelar con la función coseno, considerando que dicha función presenta los siguientes parámetros.

- Partimos de la función h = cos(x) donde h es la altura de la marea y x el tiempo en horas.
- El coeficiente del coseno deberá ser la mitad del 25% de 77.8 cm que es la altura máxima de la marea de sicigia.
- La x de la función coseno, deberá ser multiplicada por el coeficiente π/177.183524, el denominador corresponde a las horas de un cuarto del mes lunar.
- A la función coseno se le deberá sumar una cantidad igual al coeficiente del coseno.

Quedando la función que modela la altura máxima de las mareas de acuerdo con el ángulo que se forman entre la Luna, la Tierra y el Sol por el movimiento de dichos astros de la siguiente manera.

$$h = 9.725\left(\frac{\pi}{177.183528}x\right) + 9.725$$



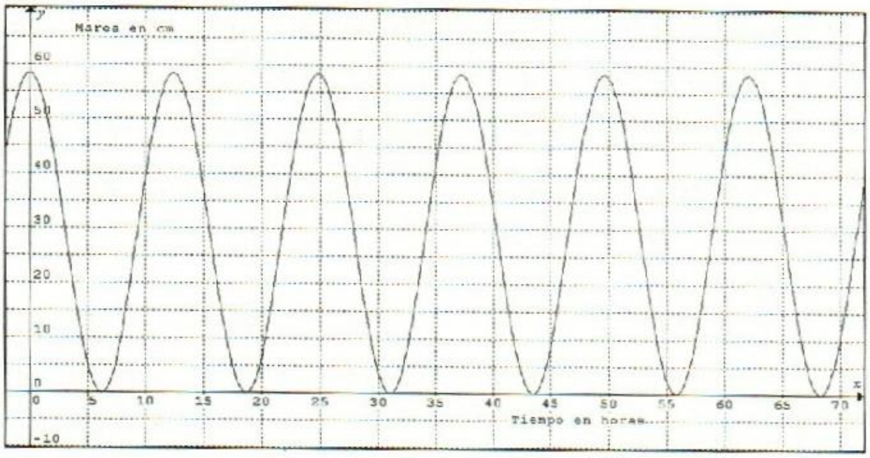
Gráfica 8. Mareas provocadas por la variación del ángulo entre la Tierra, la Luna y el Sol, expresadas en cm en el transcurso del tiempo (horas)

Como puede observarse en la gráfica anterior, el tiempo que separa dos mareas de sicigias consecutivas, es igual al tiempo promedio que transcurre entre una luna llena y un novilunio, o viceversa. Así también se puede ver que el tiempo que se tarda entre dos bajamares consecutivas es igual al tiempo promedio entre el Cuarto Creciente y el Cuarto Menguante o a la inversa.

Como la función anterior contempla el 25% de la altura de la marea, el 75% restante hay que considerarlo en otra función, donde la Luna sea la principal causante de dicha variación. Lo anterior es válido puesto que la marea solar se desplaza muy poco cada día y la mayor parte de ella se encuentra contemplada en la función precedente. Sin embargo, dicho porcentaje representa unos pocos centímetros de mayor altura en la marea. Para modelarlo se toma en cuenta las siguientes características de la función coseno.

- Se inicia a partir de h = cos (x), donde h es la altura de la marea en cm y x el tiempo en horas
- Se multiplica la función coseno por la mitad del 75% de la altura máxima de la marea.
- Finalmente se le suma una cantidad igual al cociente de la función coseno. Quedando la expresión y su gráfica de la siguiente manera:

$$h = 29.175\cos\left[\left(\frac{\pi}{6.20317916}\right)(x)\right] + 29.175$$

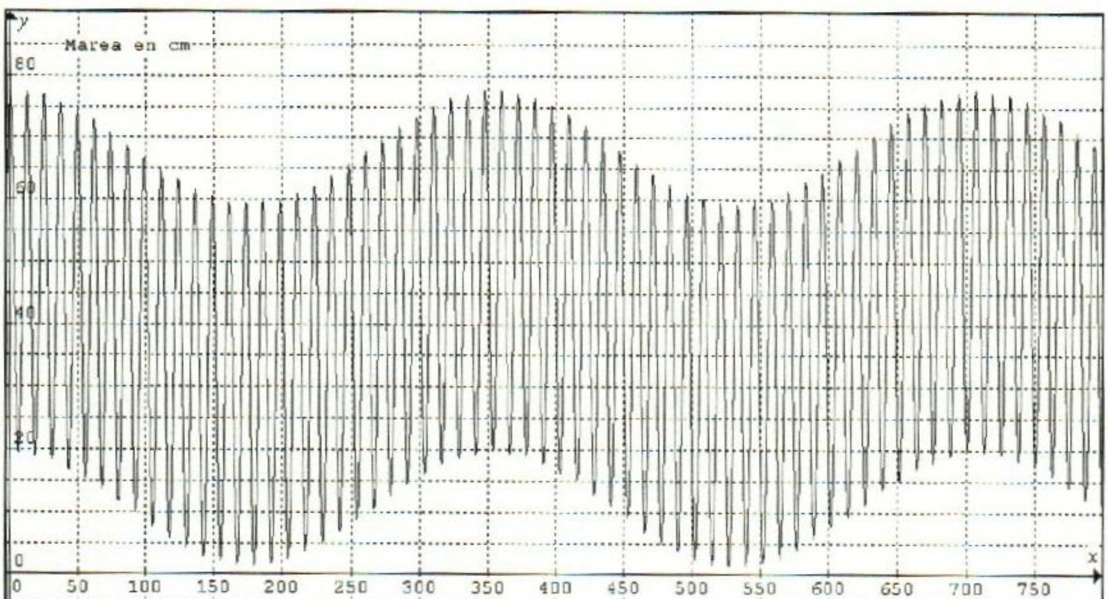


Gráfica 9. Mareas lunares modificadas y ajustadas al 75% de la altura total.

Sumando las dos últimas funciones, se obtiene un modelo bastante aproximado del comportamiento real de las mareas astronómicas, siendo su expresión analítica y gráfica como se muestran a continuación.

$$h = 9.725\left(\frac{\pi}{177.183528}x\right) + 29.175\cos\left(\frac{\pi}{6.20317916}x\right) + 38.9$$

Como puede observarse en la expresión precedente, únicamente el último término fue necesario calcularlo sumando los de cada función.



Gráfica 10. Altura de la marea lunisolar en cm en el transcurso del tiempo (horas)

Lógicamente, la función anterior está realizada bajo el supuesto de que la órbita de la Tierra y la de la Luna son circunferencias perfectas y que las fases lunares ocurren al mismo intervalo de tiempo, implicando que en todos los meses lunares se tienen las mismas alturas de mareas, lo cual no es cierto, debido a que tanto la Luna como la Tierra, sus órbitas son elípticas.

Ahora consideremos a la órbita de la Luna elíptica, si bien no todos los meses lunares presentan la misma órbita, se puede calcular una órbita que represente la órbita media. Para ello se considera que el semieje mayor tiene una dimensión de 384 400 000 metros y una excentricidad de 0.0549, con dichos datos se pueden calcular las dimensiones del semieje menor y con ello obtener la ecuación de la elipse.

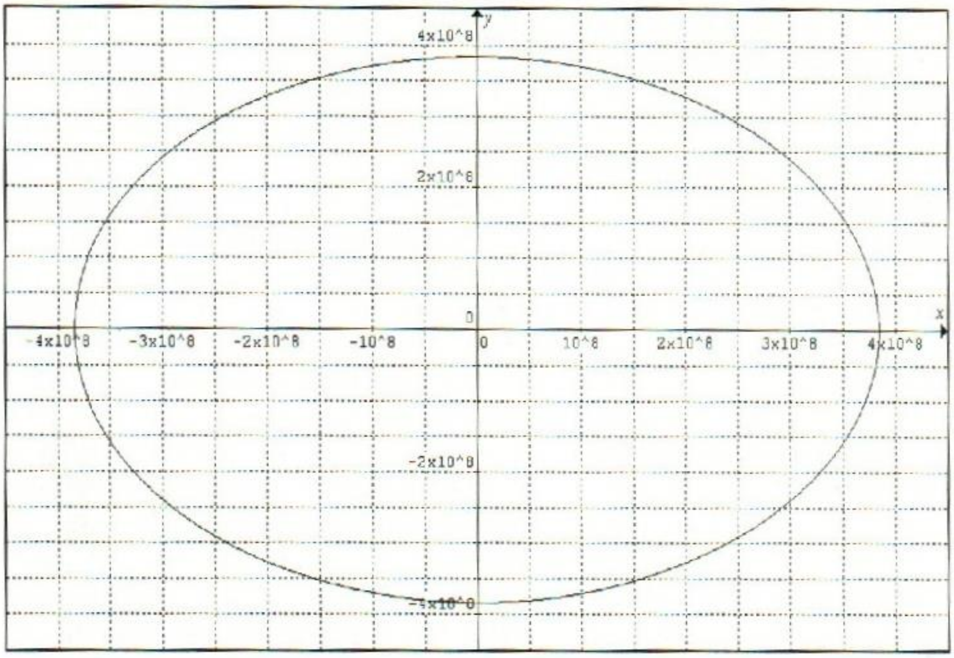
$c = ea = 0.0549(384400000) = 21103560$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(384400000)^2 - (21103560)^2} = 383820270$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse se puede expresar de las siguientes maneras:

$$\frac{x^2}{(384400000)^2} + \frac{y^2}{(383820270)^2} = 1$$

$y = \pm 0.998491857\sqrt{1.4776336 \cdot 10^{17} - x^2}$ gráficamente se tiene



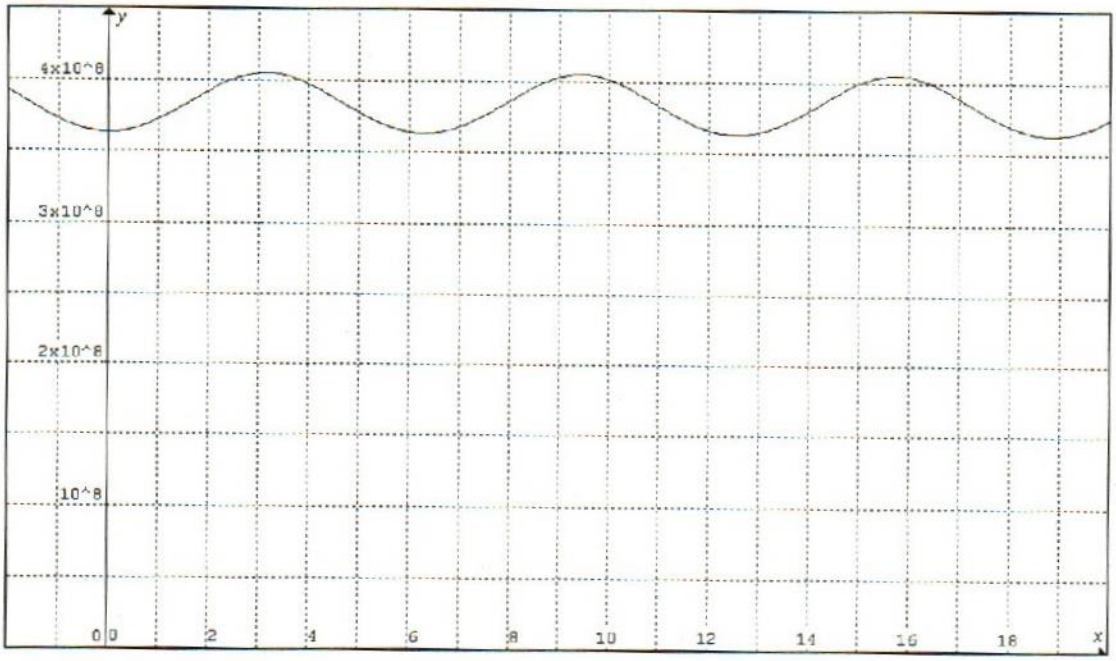
Gráfica 11. Órbita elíptica de la Luna expresada en mts.

Dado que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es elíptica con el planeta en uno de sus focos, el radio vector de ésta varía conforme la Luna avanza en su recorrido. Para calcular el radio vector se aplica la fórmula siguiente:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(x)}$$

Donde: r es el radio vector, a es el semieje mayor de la elipse, e su excentricidad.

Sustituyendo sus datos respectivos se tiene: $r = \frac{383241414.6}{1+0.0549\cos(x)}$, cuya gráfica se presenta a continuación.



Gráfica 12. Variación del radio vector de la Luna, que muestra la variación de la distancia Luna – Tierra en cada ciclo lunar expresada la altura en metros y el eje x en radianes

En la gráfica anterior se puede ver como la Luna al estar en su perigeo alcanza una distancia mínima, lo cual ocurre cuando el ángulo, expresado en radianes toma los valores 0, 2π, 4π, ... , 2nπ. Mientras que en el apogeo se encuentra más alejada de la Tierra, lo cual ocurre cuando el ángulo toma los valores de π, 3π, 5π, ... ,(2n-1)π.

La astronomía nos indica que el mes anomalístico (de perigeo a perigeo), en términos medios, dura 27 días, 13 horas, 18 minutos y 33.1 segundos, o lo que es lo mismo 27.554555 días, por lo que el tiempo que la Luna tarda en pasar de un perigeo a un apogeo es la mitad de dicho período. Para determinar que tanto influye la variación de la distancia entre la Tierra y la Luna en las mareas, en la tabla 1 se presentan las variaciones que tiene la fuerza de marea de acuerdo con la variación del ángulo al ir la Luna haciendo su recorrido.

Tabla 1. Porcentaje de atracción gravitacional de la Luna de acuerdo a la variación en la distancia entre el centro lunar y el terrestre.

Ángulo	Distancia Tierra – Luna en	Fuerza de marea	Porcentaje de

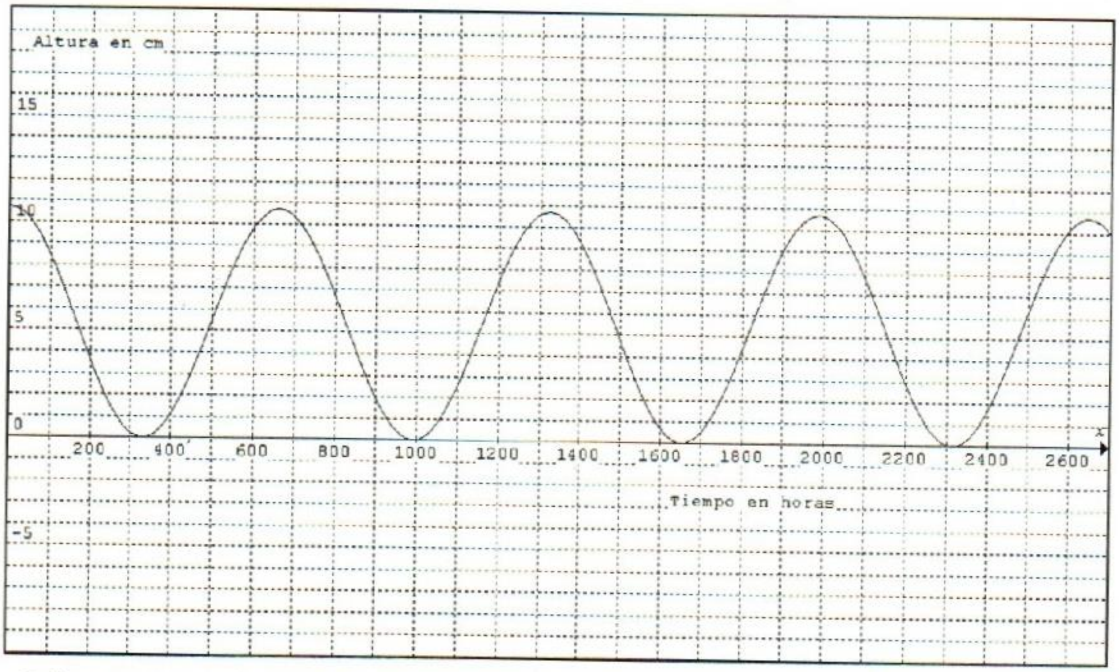
en rad.	metros	por 10^{-5}	atracción gravit.
0°	363 296 440.0	3.71441897	100.00%
π/4	368 919 884.8	3.602044255	96.98%
π/2	383 241 414.6	3.337861436	89.86%
3π/4	398 719 781.2	3.083738965	83.02%
Π	405 503 560.0	2.981424599	80.27%
5π/4	398 719 781.2	3.083738965	83.02%
3π/2	383 241 414.6	3.337861436	89.86%
7π/4	368 919 884.8	3.602044255	96.98%
2π	363 296 440.0	3.71441897	100.00%

Como se puede apreciar en dicha tabla, el porcentaje varía en un 20% aproximadamente, ya que en el apogeo, por estar la Luna a su máxima distancia, su fuerza de marea solo vale alrededor del 80%, en tanto que en el perigeo se tiene el 100%. Si además consideramos que la fuerza de marea provocadas por la Luna y el Sol cuando se consideraron la órbita lunar y terrestre circulares, representan el valor medio, entonces está variación será un 10% más o menos, según coincida el perigeo con una sicigia o el apogeo con una bajamar.

De acuerdo con la tabla anterior, la fuerza de marea lunar varía alrededor del 20% como consecuencia de la variación de la distancia entre la Tierra y la Luna en un tiempo de medio mes anomalístico. Para modelar dicho fenómeno se procede de la manera siguiente:

- Se parte de la función h = cos(x), donde h representa la altura de la marea y x el tiempo en horas
- El cos(x) se debe multiplicar por el 10% del total de la marea lunar, misma cantidad que deberá sumarse a ésta parte de la función, quedando ésta representada por la siguiente ecuación y cuya gráfica se muestra después de su expresión analítica.

$$h = 5.34\cos\left(\frac{\pi}{330.65466}x\right) + 5.34$$

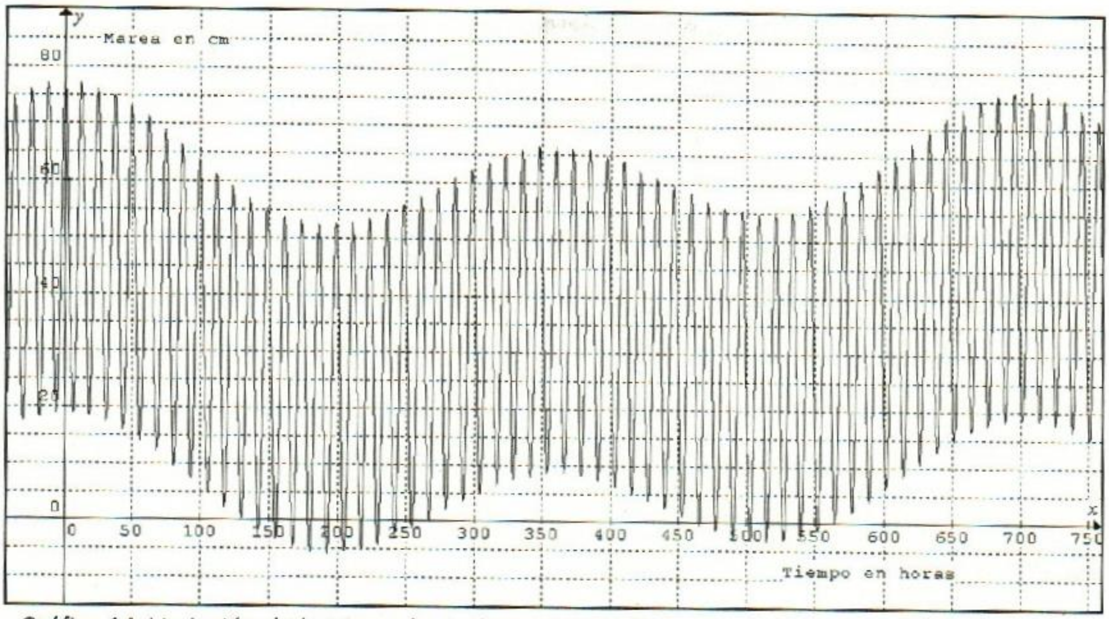


Gráfica 13. Variación de la marea por causa de la variación de la distancia Tierra - Luna

Si esta función se suma a la función que representó la variación de la marea lunisolar en condiciones de órbita circular, se tendrá una función más aproximada a la variación de dicha marea, cuya ecuación se presentan en seguida.

$$h = 9.725\left(\frac{\pi}{177.183528}x\right) + 29.175\cos\left(\frac{\pi}{6.20317916}x\right) + 5.34\cos\left(\frac{\pi}{330.65466}x\right) + 38.86$$

En la gráfica 14, se aprecia que las mareas de sicigias no son iguales en las lunas nuevas o llenas, éstas dependen también de la distancia que guarden la Tierra y la Luna. Si en el novilunio o plenilunio coincide con el perigeo se tendrán las mareas de sicigias más elevadas y por el contrario si coinciden con el apogeo, se tendrán las sicigias más bajas. La misma observación se puede hacer en los cuartos lunares, ya que si una bajamar coincide con el perigeo no será tan baja comparada con una bajamar que coincida con el apogeo.



Gráfica 14. Variación de la Marea lunisolar con la órbita lunar elíptica y la de la Tierra

La órbita de la Tierra tampoco es circular, sin embargo, ésta es mucho más cercana a la circunferencia que la de la Luna, ya que su excentricidad es de solamente 0.00329 y dado que la distancia que hay entre la Tierra y el Sol es mucho mayor que la que existe entre la Tierra y la Luna, la fuerza de atracción gravitacional que ejerce el Sol sobre la Tierra varía muy poco, a continuación se calcula la órbita elíptica media de la Tierra alrededor del Sol, la variación de su radio vector considerando que el Sol se ubica en uno de los focos de la elipse, la variación en la distancia entre éstos astros al ir girando la Tierra en su órbita y la variación porcentual de dicha distancia, para finalmente modelar la fuerza de marea considerando únicamente la variación de la distancia Tierra – Sol.

Dado que la excentricidad de la órbita terrestre es de 0.00329 y la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $149.6 \cdot 10^9$ metros, distancia que corresponde a la longitud del semieje mayor de la elipse, entonces se puede calcular, tanto la distancia del centro de la elipse al foco de ésta y la longitud del semieje menor.

$c = ea = 0.00329\ (149.6 \cdot 10^9) = 492\ 184\ 000$ mts.

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(149.6 \cdot 10^9\right)^2 - \left(492184000\right)^2} = 149.5991904 \cdot 10^9$$

Por lo tanto, la función que representa la órbita de la Tierra en términos medios se puede expresar a través de la siguiente función.

$$y = \pm 0.999994587\sqrt{2.238016 \cdot 10^{22} - x^2}$$

El radio vector que representa la variación de la distancia entre ambos astros se calcula a través de la expresión siguiente.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta)}$$

$$r = \frac{149.5983807 \cdot 10^{11}}{1+0.00329\cos(\theta)}$$

La variación de la distancia entre la Tierra y el Sol se presenta en la tabla 2, en donde se hace variar el ángulo de 45º en 45º, expresados en radianes.

Como puede apreciarse en la tabla 2, la variación en la distancia entre dichos cuerpos celestes es un poco menor al 1.5%. Considerando que varía 1.5% como máximo las distancias entre la Tierra y el Sol y conociendo que el afelio (distancia máxima entre la Tierra y el Sol) ocurre en el solsticio de verano (22 de junio) y que el perihelio (distancia mínima Tierra – Sol) en el solsticio de invierno (22 de diciembre), se modela la variación en la fuerza de marea provocada únicamente por la elipticidad de la órbita terrestre con la función que se presenta después de la tabla y su gráfica respectiva.

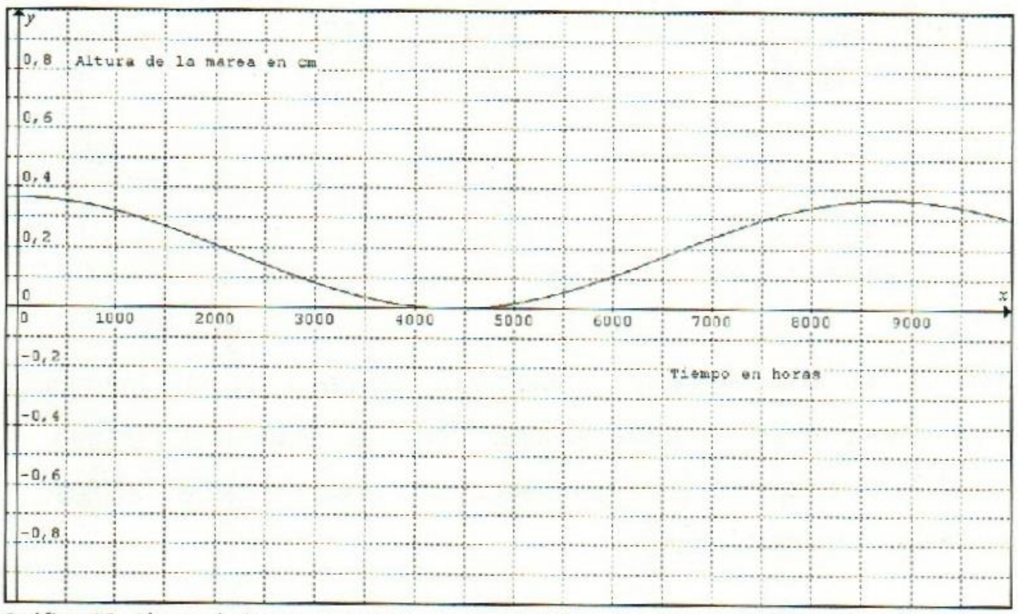
Tabla 2. Variación porcentual de la distancia Tierra – Sol al variar el ángulo de la Tierra con respecto al Sol en radianes.

Rad.	Distancia Tierra – Sol en mts. Por 10^{13}	Fuerza de atracción gravitacional (10^{-7})	Porcentaje
0	1.49107816	5.940051441	100.00%
π/4	1.492511656	5.928646571	99.81%

π/2	1.495983807	5.901157948	99.35%
3π/4	1.499472151	5.873733198	98.88%
Π	1.50092184	5.862392202	98.69%
5π/4	1.499472151	5.873733198	98.88%
3π/2	1.495983807	5.901157948	99.35%
7π/4	1.492511656	5.928646571	99.81%
2π	1.49107816	5.940051441	100.00%

$$h = 0.183\cos\left(\frac{\pi}{4382.9}x\right) + 0.183$$

Donde 0.183 representa el 1.5% de la marea solar máxima, h la altura de la marea en cm y x el tiempo en horas.



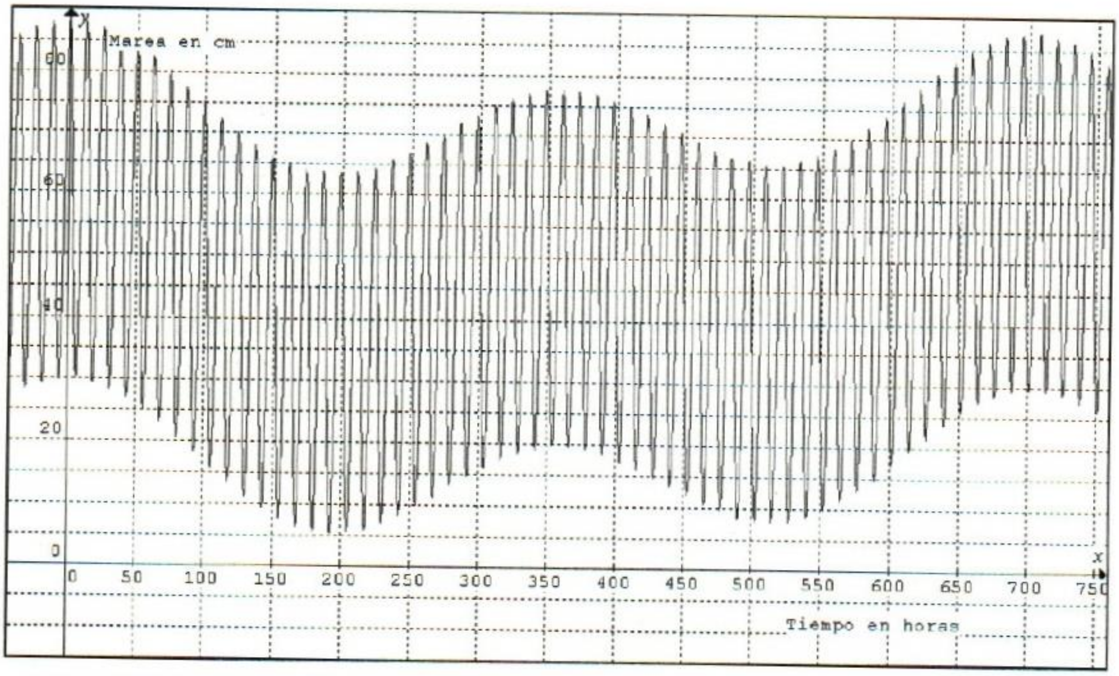
Gráfica 15. Altura de las mareas provocadas por la variación en la distancia entre la Tierra y el Sol debidas a la forma elíptica de la órbita terrestre.

Finalmente, simplemente se suma esta última función a la que modela las mareas lunisolares, cuando se consideró a la órbita lunar elíptica, obteniendo la expresión siguiente:

$$h = 9.725\left(\frac{\pi}{177.183528}x\right) + 29.175\cos\left(\frac{\pi}{6.20317916}x\right) + 5.34\cos\left(\frac{\pi}{330.65466}x\right) +$$

$$0.183\cos\left(\frac{\pi}{4382.9}x\right)+44.423$$

La gráfica de dicha función se presenta a continuación.



Gráfica 16. Mareas lunisolares considerando órbitas elípticas de la Luna y la Tierra

La función anterior, es una expresión bastante aproximada de las mareas oceánicas, si se desea introducir otros factores como la latitud por ejemplo, simplemente se debe investigar el efecto que esta causa en una latitud específica, modelarla y sumarla a la función anterior.

4.5 Efecto de la Luna y el Sol sobre las plantas

En los dos subcapítulos precedentes, se modeló las mareas oceánicas considerando en ellas únicamente el factor astronómico, por lo que dichos modelos representan la variación que causan en las mareas oceánicas los efectos gravitatorios conjuntos de la Luna y el Sol.

El efecto gravitatorio en tierra firme es exactamente el mismo que en el mar, solo que en la parte solida no se percibe. Sin embargo, si tienen algún efecto dichos astros sobre los seres vivos deben ser estudiados en base al efecto astronómico que éstos muestran en el mar.

Por lo anteriormente dicho, la función que se emplea para modelar las mareas oceánicas, es la que debe emplearse para experimentar en agronomía y evaluar si existe algún efecto que pueda cuantificarse. Dicho modelo debe aplicarse en forma cualitativa y no cuantitativa, ya que su cuantificación está diseñada para las mareas oceánicas, sin embargo, la importancia de éste, es su cualidad de predecir el comportamiento de la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol sobre el ecuador de nuestro planeta. Por lo anterior la función que modela la atracción gravitacional conjunta de la Luna y el Sol es el siguiente:

$$h = 9.725\left(\frac{\pi}{177.183528}x\right) + 29.175\cos\left(\frac{\pi}{6.20317916}x\right) + 5.34\cos\left(\frac{\pi}{330.65466}x\right) +$$

$$0.183\cos\left(\frac{\pi}{4382.9}x\right) + 44.423$$

Donde h representa la altura de la marea oceánica y de aquí en adelante representará la atracción gravitacional conjunta de la Luna y el Sol, y x el tiempo transcurrido en horas.

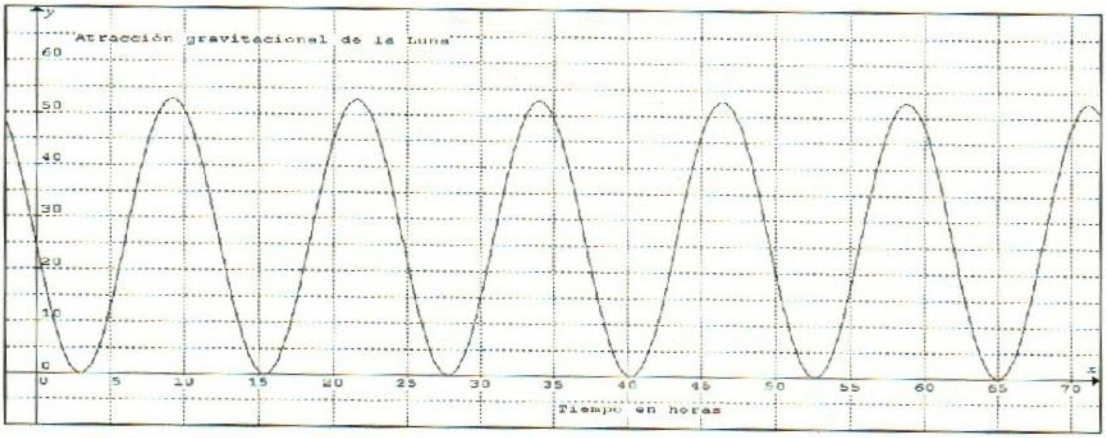
Para poder aplicarse correctamente el modelo anterior, hay que tener en cuenta que éste se diseñó para que en la hora cero suceda una atracción gravitacional máxima en cada uno de los factores considerados, hecho que sucede cuando ocurren los siguientes eventos astronómicos: la Luna debe estar en fase de nueva o llena y por lo mismo, el ángulo entre la Tierra, la Luna y el Sol debe ser 0° o 180°, la Luna debe encontrarse en pleno perigeo y la Tierra deberá estar en el perihelio, situación que no es muy común que suceda. Afortunadamente se cuentan con los datos astronómicos precisos sobre los aspectos referidos, así como las propiedades de la función coseno que permiten iniciar el modelo en una fecha precisa y una hora específica.

Por ejemplo, en México, el día 21 de julio del año 2009, a las 21 horas con 35 minutos sucedió la Luna Nueva y casi a la misma hora ocurrió el perigeo (21 horas con 17 minutos), estos dos acontecimientos hacen que dicha fecha y hora sean muy plausibles para que el modelo lo represente como la mayor atracción gravitacional y a partir de la hora cero de dicho día iniciar el modelo, para ello simplemente hay que realizar los ajustes siguientes:

- Para hacer que el mayor efecto gravitatorio de la Luna ocurra a las 21 horas con 35 minutos, a la parte de la función que corresponde al efecto gravitatorio de nuestro satélite, simplemente hay que retrasarlo una cantidad igual a la diferencia entre 24.812716631 (que corresponde al tiempo en que ocurre la tercera atracción más alta cuando la primera ocurre exactamente en la hora cero) y 21.58333333 que corresponde a la hora mencionada, es decir, 3.2293833, dicha cantidad hay que sumarlo a la x para que ésta se desplace hacia la izquierda dicha cantidad, y multiplicarlo por el coeficiente de la x, que provoca el efecto deseado. A continuación se presenta la parte de la expresión analítica en forma independiente de dicha función.

$$h = 29.175\cos\left(\left(\frac{\pi}{6.2031791}\right)(x + 3.229383)\right) + 29.175$$

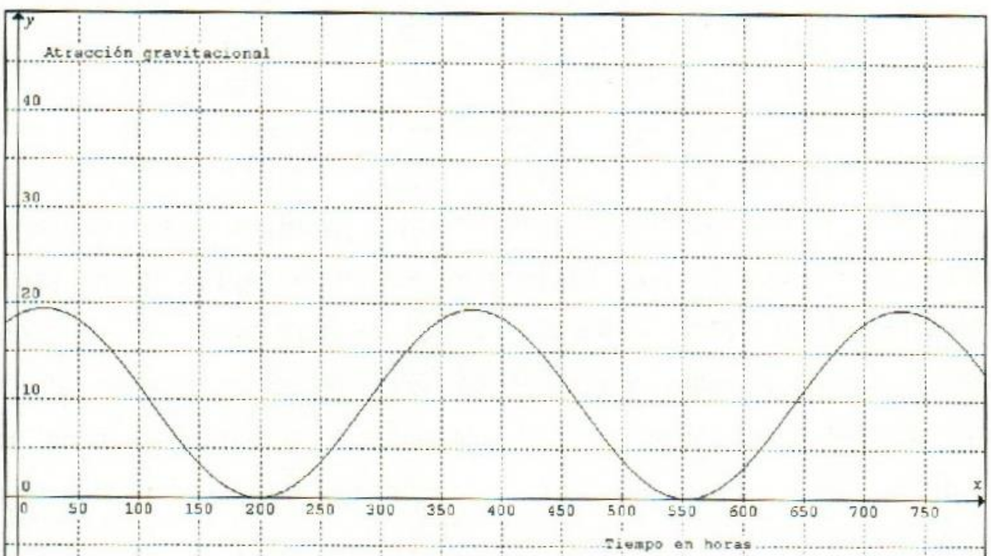
La gráfica 17 permite ver precisamente el cambio que provoca sumarle dicha cantidad a la expresión anterior.



Grafica 17. Atracción lunar iniciando en la hora cero del 21 de julio del 2009.

- El ángulo que forman la Luna, la Tierra y el Sol, en la hora del novilunio se considera de 0º, en ese momento ocurre la máxima atracción por ese factor, por lo anterior, el modelo debe presentar la mayor atracción gravitacional a las 21:35 horas, lo que se logra restando 21.58333333 a la x de la parte de la función correspondiente. A continuación se presenta la función analítica en forma independiente y su gráfica respectiva.

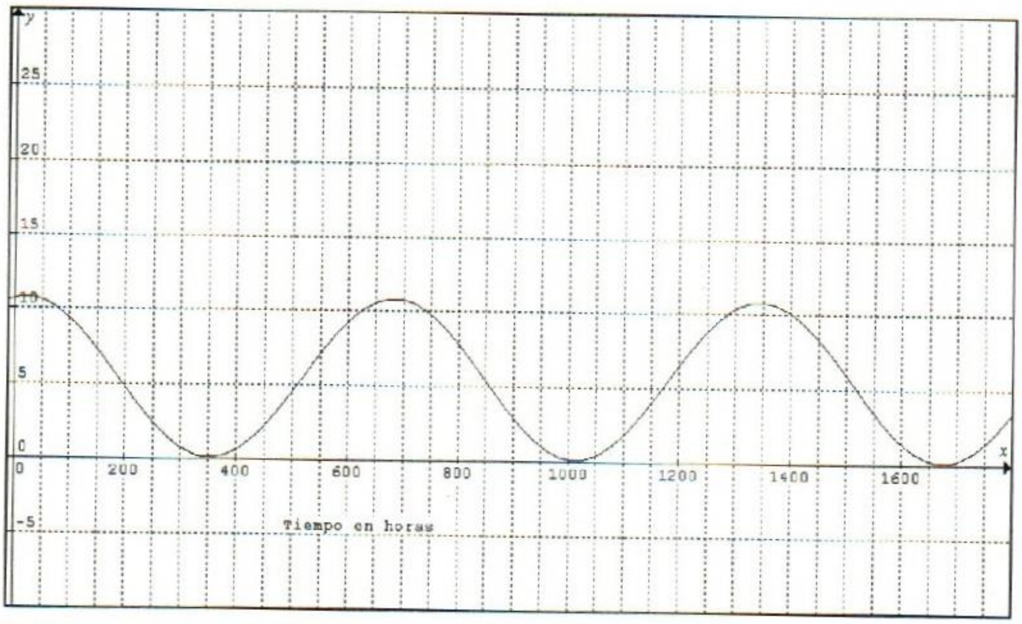
$$h = 9.175\cos\left(\left(\frac{\pi}{177.183528}\right)(x - 21.5833333)\right) + 9.175$$



Gráfica 18. Atracción gravitacional por el ángulo que se forma entre la Luna, la Tierra y el Sol, iniciando en la hora cero del día 21 de julio del año 2009

- El apogeo lunar como ya se ha mencionado no ocurre a la hora cero, sino a las 21:17 horas. Para que el modelo presente la mayor atracción gravitacional de la Luna provocada por su distancia que guarda con nuestro planeta en esa precisa hora, hay que restar de la x en la parte correspondiente de la función la cantidad de 21.28333333, como se muestra en la parte correspondiente de la función analítica y lo muestra la gráfica respectiva.

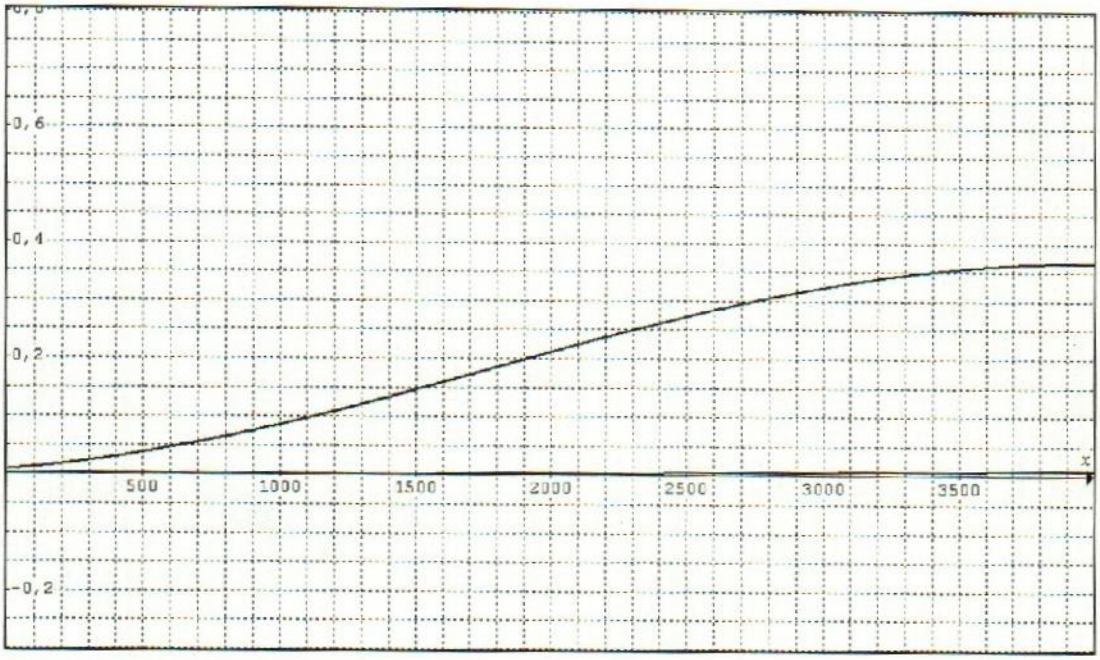
$$h = 5.34\cos\left[\left(\frac{\pi}{330.65466}\right)(x - 21.28333333)\right] + 5.34$$



Gráfica 19. La atracción lunar en perigeo a partir del 21 de julio del año 2009

- Por último, aunque de mucho menor efecto gravitatorio se tiene la posición que la Tierra ocupa el 21 de julio en su órbita elíptica, dicha posición determina el radio vector entre ella y el Sol. La astronomía nos indica que el afelio, ocurrió en éste año el 4 de julio, fecha en que la atracción gravitacional está en su mínima intensidad y a partir de dicha fecha empieza a aumentar su fuerza de atracción gravitatoria hasta alcanzar el máximo en el perihelio el 3 de enero. Para lograr que el modelo parta de la hora cero del día 21 de julio del año 2009, se le hacen dos cambios: toda la parte correspondiente de la función que representa este factor se le antepone el signo (-) para que parta de cero el 4 de julio, luego simplemente se desplaza hacia la izquierda la función el equivalente en horas los 17 días de diferencia que hay entre el 21 de julio y el 4 de julio y el modelo partirá de la fecha y hora deseada. A continuación se presenta su función analítica y gráfica respectiva.

$$h = -0.183\cos\left[\left(\frac{\pi}{4382.9}\right)(x+408)\right] + 0.183$$



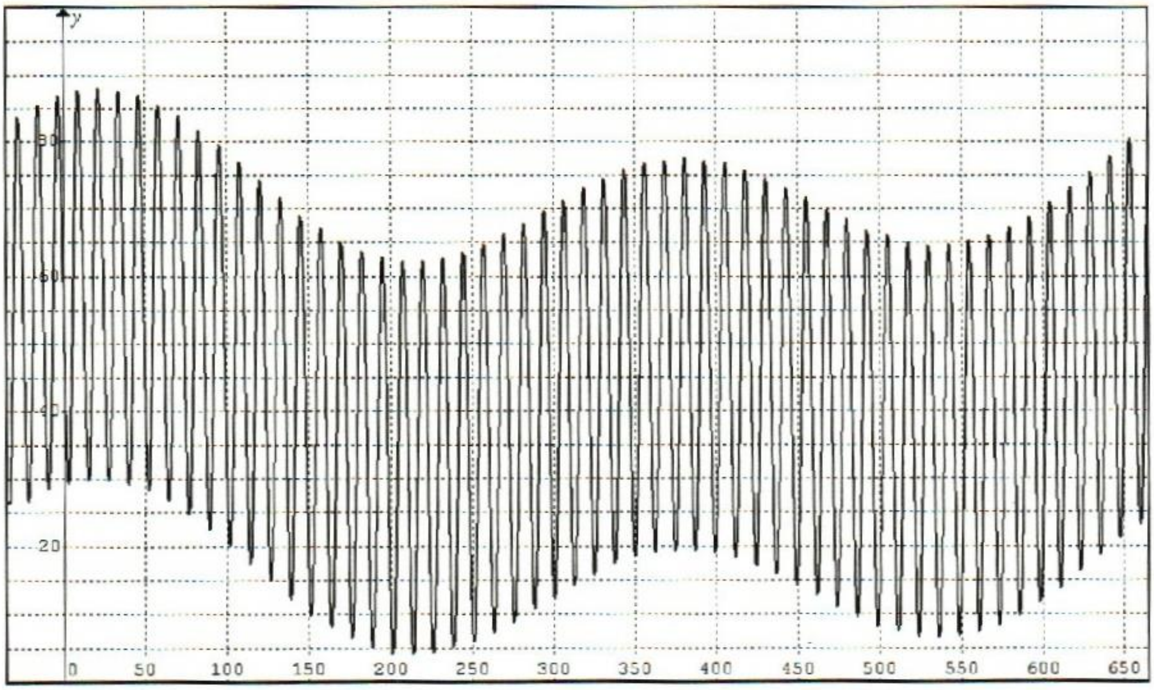
Gráfica 20. Intensidad gravitatoria provocada por la posición de la Tierra alrededor del Sol, iniciando el día 21 de iulio del año 2009.

De acuerdo con los ajustes explicados, la función que modela la atracción gravitacional de la Luna y el Sol, tomando como punto de partida la hora cero del día 21 de julio del año 2009 es la siguiente:

$$h = 9.725\cos\left(\left(\frac{\pi}{177.183528}\right)(x - 21.5833333)\right) + 29.175\cos\left[\left(\frac{\pi}{6.203179}\right)(x + 3.229383)\right] +$$

$$5.34\cos\left(\left(\frac{\pi}{330.65466}\right)(x - 21.2833333)\right) - 0.183\cos\left[\left(\frac{\pi}{4382.9}\right)(x + 408)\right] + 44.057$$

Como puede apreciarse en la siguiente gráfica, a las 21 horas con 35 minutos sucede la máxima atracción gravitacional y no en la hora cero como el modelo originalmente planteado. Puede tomarse como fecha inicial cualquier otro día, mes y año, siempre y cuando se haga los ajustes necesarios para que el modelo resultante describa correctamente la atracción lunisolar a partir de la horas cero del día y año que se desee.



Gráfica 21. Intensidad gravitatoria de la Luna y el Sol sobre el ecuador de la Tierra, iniciando en la hora cero el día 21 de julio del año 2009.

Capítulo V

Análisis socioepiestemológico y transposición didáctica de los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol sobre las plantas

En este capítulo se analizan y discuten los problemas didácticos que se tienen en la Facultad de Agronomía, Campus V, de la UNACH para vincular los contenidos teóricos contemplados en los programas de estudio de Matemáticas I y Matemáticas II con problemas reales de agronomía. Para ello se revisan las libretas de apuntes de los alumnos que han cursado dichas materias y se entrevistan estudiantes que actualmente cursan entre el segundo y séptimo semestre para tener referencia de cómo se ha llevado a cabo la parte práctica de dichos cursos. Además se entrevistan a los tres docentes que imparten las materias mencionadas, para contar con el punto de vista de ellos. Con base en lo anterior se analiza y discute la problemática didáctica que se tiene en dicha Facultad.

En la dimensión sociocultural se analizan también las creencias que los campesinos del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas, poseen sobre los efectos que la Luna tiene en sus cultivos, árboles maderables y animales. Se contrastan con lo planteado por la teoría de la savia de las plantas, para luego analizar las diferencias y semejanzas que ambas tienen con el modelo de atracción gravitacional de la Luna y el Sol expuesto en el presente trabajo, dicho modelo se basa en la teoría de las mareas oceánicas que tienen un sustento científico en la teoría newtoniana de la gravitación universal y la astronomía.

Finalmente se presenta una secuencia didáctica que permite primero modelar el efecto gravitatorio de la Luna y el Sol en las mareas oceánicas y luego con algunos ajustes modelar dicha atracción sobre las plantas a través del uso de las propiedades gráficas de la función coseno. Todo con el fin de propiciar la transposición didáctica en el plan del sistema didáctico.

5.1 Prácticas de Matemáticas en el Rancho San Ramón o en la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH.

En mayo del año 2006, en la Facultad mencionada, se culminó de reestructurar los planes y programas de estudio que se pusieron en marcha en agosto del mismo año. En el área de matemáticas, dichos planes contemplan impartir dos cursos, Matemáticas I y Matemáticas II en los semestres I y II respectivamente. Cada una de estas materias contiene dos aspectos a desarrollar: una parte teórica y una parte práctica, con un 50% de la carga horaria cada una. La parte práctica fue diseñada para vincular los contenidos teóricos con ***problemas reales de la agronomía***, teniendo como escenario para desarrollar dichas prácticas el Rancho San Ramón (ubicado en el municipio de Villa Flores, Chiapas) propiedad de la misma institución o bien en dicha Facultad (ver Anexo B).

De acuerdo a las encuestas y entrevistas realizadas a maestros (Anexo C) que imparten las materias referidas y a estudiantes que las han cursado o estén cursando dichas asignaturas, se obtuvo que hasta la presente fecha, ninguno de los profesores ha diseñado práctica alguna como las indicadas en los programas de estudio, ni en el Rancho San Ramón, ni en la Facultad. Los tres maestros que han impartido dichos cursos desde agosto del 2006 a la fecha, dedican todas las horas a enseñar parte de los contenidos teóricos programáticos y a realizar ejemplos y ejercicios de acuerdo con la bibliografía señalada, la cual por cierto no está diseñada para aplicarse a la agronomía, o bien abordan los contenidos temáticos a través de ejemplos y ejercicios diseñados o adaptados por el docente o por algunos matemáticos y que se relacionan con la agronomía, pero que de ninguna manera constituyen problemas reales de este campo del conocimiento. Además, sólo uno de los tres maestros que imparten matemáticas participó en la reestructuración de los planes y programas de estudio culminados en mayo del año 2006.

Dos de los docentes que imparten las materias referidas, manifestaron enfrentar dos problemas para llevar a cabo las prácticas indicadas en los programas de estudio: la falta de bibliografía diseñada para abordar problemas reales de agronomía y la profesión que ellos poseen, uno es Ingeniero Civil y el otro Ingeniero Topógrafo Fotogrametrista. Por lo anterior, la parte práctica de los programas no lo llevan a cabo y las horas que deberían ser para ellas lo dedican a los contenidos teóricos de los programas. El maestro que falta comentar es Ing.

Agrónomo y él considera que la parte práctica lo cubre solucionando ejercicios diseñados para la agronomía (ver Anexo A), los cuales no provienen de experimentos o que sean problemas reales a atender, más bien son ejercicios creados por matemáticos que desean hacer notar que la parte teórica que exponen pueden tener alguna aplicación en algún área del conocimiento, y por lo mismo no ocupa el Rancho San Ramón para llevarlas a cabo o la Facultad misma, puesto que dicha aplicación es un tanto ficticia.

Con lo dicho en los párrafos anteriores, es claro que las prácticas de matemáticas a problemas reales de agronomía como lo establecen los programas de estudio de las materias Matemáticas I y Matemáticas II de la institución referida, han estado totalmente ausentes desde que se inició el nuevo plan de estudios hasta la fecha, por lo que es urgente atenderlas.

Precisamente, el presente trabajo al estudiar la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre las plantas, permite aplicar varios de los contenidos teóricos a problemas reales de la agronomía como los que a continuación se expresan.

Al estudiar la atracción gravitacional individual de la Luna y luego la del Sol y posteriormente la atracción conjunta de ambos astros sobre la Tierra, se abordan contenidos de álgebra (ecuaciones), geometría (circunferencia, triángulos) y Trigonometría (función coseno, triángulos rectángulos y oblicuángulos), por lo que se cubren contenidos teóricos de dos unidades de las cuatro que establece el programa de Matemáticas I y que prácticamente son lo que los profesores de matemáticas alcanzan a ver en forma teórica (ver Anexo A). Además, para modelar la atracción gravitacional que la Luna y el Sol ejercen sobre las plantas, tanto individual como conjunta, se propone en el subcapítulo 5.3 una secuencia didáctica basada en las propiedades gráficas de la función coseno que permite transponer conocimientos matemáticos, astronómicos y de las mareas oceánicas hacia el sistema didáctico de una institución dedicada a la formación de Ingenieros Agrónomos.

Una vez que se tiene la función matemática que modela la atracción lunisolar sobre las plantas, se propone realizar experimentos con el flujo de la savia de las plantas y con el ritmo de crecimiento de algunas de ellas como se explica más ampliamente en el próximo capítulo, lo cual permitirá relacionar dichos comportamientos con funciones cuadráticas o trigonométricas, lo que a su vez hará posible aplicar el cálculo diferencial y precisamente en la teoría de máximos y mínimos relativos como lo especifica el programa de estudio de Matemáticas II, por lo que será posible cubrir el 50% de las prácticas señaladas en el programa respectivo y que coincide con los temas que los docentes alcanzan a impartir.

5.2 Coincidencias y discrepancias entre las creencias campesinas sobre el efecto de Luna, las teorías agronómicas y la atracción gravitacional de la Luna y el Sol.

Los campesinos del Ejido la Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas, son productores que en su mayoría se dedican al cultivo de maíz y frijol, unos pocos cultivan hortalizas, principalmente cebolla, y en cuanto a ganadería, cuentan con vacunos, equinos, porcinos y aves de corral, los dos primeros en su mayor parte con fines de trabajarlos en la agricultura como animales de tiro o carga, los porcinos normalmente son con fines comerciales y los de traspatio en su mayoría para autoconsumo, solamente un porcentaje pequeño de ellos se puede considerar que se dedican a la ganadería bovina o porcina como actividad principal o con fines comerciales.

Las creencias de estos productores sobre el efecto de Luna (como ellos lo llaman) en sus cultivos y animales, se puede sintetizar de la siguiente manera. La siembra de cultivos debe realizarse en luna maciza (a partir del Cuarto Creciente hasta tres días antes de la Luna Nueva), esto hará que el cultivo produzca mejores cosechas y los granos (maíz y frijol) que ellos cultivan se conserven por más tiempo sin agorgojarse, la cosecha si bien es recomendable realizarlo en luna maciza influye menos que la siembra, dado que el grano ya está formado. En el corte de árboles que se utilizarán para madera en la construcción de sus casas, también recomiendan cortarla en luna maciza para que ésta tenga mayor durabilidad y sea menos atacada por las polillas, si el árbol se aserrará y la madera se ocupará para muebles, entonces es más recomendable cortarlo en luna tierna (tres días antes del novilunio hasta el Cuarto Creciente) ya que la madera se agrietará menos, lo anterior lo atribuyen al contenido de savia de los árboles, ellos han observado que en luna tierna los árboles al cortarlos derraman mayor cantidad de dicha sustancia que en luna maciza. En los animales creen que la Luna se relaciona más con los partos, los cuales aseguran ocurren con mayor frecuencia en cada una de las fases lunares y los nacidos en luna maciza son más fuertes y resistentes a las enfermedades que los nacidos en luna tierna.

De acuerdo con la revisión bibliográfica realizada y las entrevistas hechas a los campesinos referidos, tanto en los productores agropecuarios como en los agrónomos existen dos corrientes de pensamiento: los que creen en la influencia de la Luna sobre los cultivos y las plantas en general y los que no creen. Los que no creen y son agrónomos, argumentan que son supersticiones de las gentes del campo y que carecen de bases científicas, en tanto que los productores que no creen en el efecto lunar son personas más jóvenes y que han sido influenciados por los agrónomos que les dan asistencia técnica, quienes les indican sembrar cuando las condiciones de humedad sean las adecuadas, sin tomar en cuenta a la Luna.

Por otra parte, los agrónomos que creen en la influencia lunar, han creado algunas teorías como la del flujo de la savia de las plantas. Esta teoría lo resume bastante bien Restrepo (2005) en la figura 8.

De la figura 8 se puede ver que para dicho autor, el flujo de la savia en los vegetales sigue el ritmo de crecimiento aparente de la Luna. Al analizarlo se ve que en el novilunio la mayor parte de la savia se concentra en las raíces, la única razón sería porque no hay Luna (no es visible) en el cielo a simple vista, excepto cuando hay eclipse de Sol. En el Cuarto Creciente la savia ha iniciado su ascenso y se concentra mayormente en tallos y ramas (parte media) que se relaciona con la parte iluminada de la Luna (media Luna). El vital líquido continúa su ascenso hasta alcanzar su punto de máxima elevación en la Luna Llena y la savia se encuentra en mayor cantidad en las copas de los árboles incluyendo hojas y frutos, lo cual se relaciona directamente con la única fase lunar en donde se encuentra la cara del satélite natural que da a la Tierra totalmente iluminada. Conforme la Luna inicia su decrecimiento en su tamaño aparente, la savia también desciende para que en el Cuarto Menguante se encuentre principalmente en los tallos y ramas (parte media), que tiene relación nuevamente con la media Luna que se ve desde la Tierra. Finalmente la savia continúa descendiendo hasta llegar al novilunio y nuevamente se repite el ciclo.

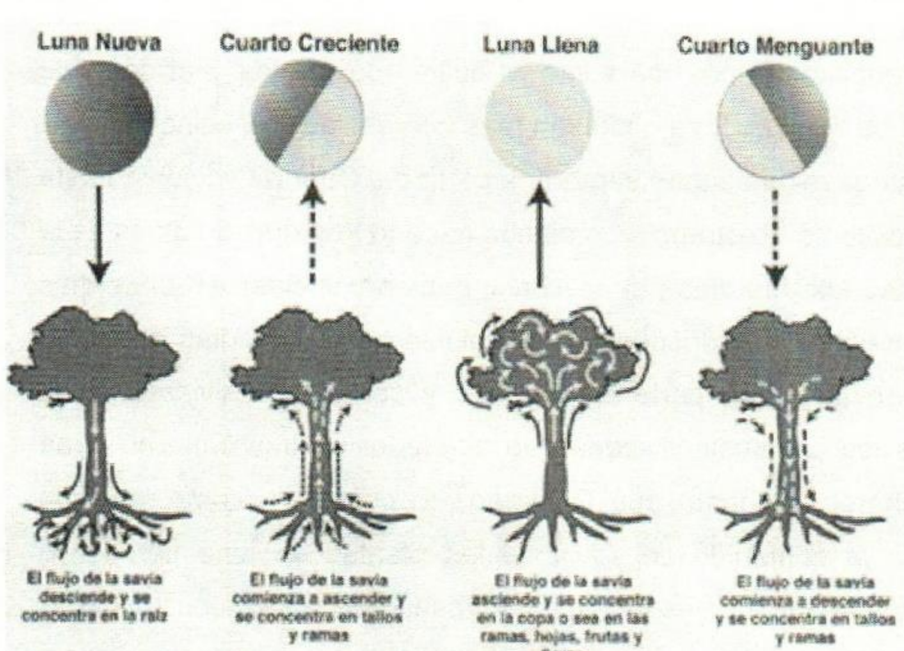


Figura 8. Las fases lunares y la dinámica de la savia de las plantas
Fuente: Restrepo, 2005, p. 5

En síntesis, Restrepo (2005) asocia el flujo de la savia de las plantas con el crecimiento aparente de la Luna. Cuando en apariencia no hay Luna, la savia está en su nivel mínimo y cuando está en plenilunio la savia está en su nivel máximo y en los cuartos en su nivel medio, es decir, la savia en los vegetales sigue el ritmo de la parte iluminada de nuestro satélite vista desde la Tierra.

De acuerdo con la teoría del flujo de la savia de las plantas ellos realizan una serie de recomendaciones para las actividades agrícolas como son: siembra, cosecha, poda, etc., tanto si se trata de cultivos donde la parte aprovechable es la vegetativa, como si son para granos o frutas, así como para la madera. En cuanto a granos recomiendan sembrarlo y cosecharlo en el período denominado de aguas abajo, que comprende desde 3 días después de la Luna Llena hasta tres días pasados de la Luna Nueva y para el corte de árboles maderables la recomendación es la misma dado que de acuerdo a dicha teoría la savia estará concentrada principalmente en las raíces y tanto granos como madera se conservarán mayor tiempo.

Al comparar las creencias campesinas sobre el cultivo de granos y el corte de madera con la teoría de Restrepo, se observan más diferencias que coincidencias. Veamos, los campesinos recomiendan sembrar a partir del Cuarto Creciente hasta tres días antes del novilunio, Restrepo recomienda hacerlo tres días después de la Luna Llena hasta pasados tres días del novilunio, si bien coinciden en unos días que corresponde entre tres días después del plenilunio hasta tres días antes del novilunio, divergen en la mayor parte del período y sobre todo difieren en lo fundamental, ya que los campesinos creen que alrededor del novilunio no debe sembrarse ni cosecharse, en tanto que Restrepo lo considera como las más propicias. En cuanto al contenido de savia de las plantas en luna tierna, los productores aseguran que los árboles tienen mayor cantidad de savia en sus tallos y Restrepo asegura que ésta se encuentra concentrada mayormente en las raíces, conclusiones que los llevan a recomendar el corte de árboles maderables en periodos lunares diferentes.

Al comparar las creencias campesinas y la teoría de la savia de las plantas, con la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre nuestro planeta, vemos que para ninguna de ellas constituye la base de sus creencias o teoría. Los campesinos sus creencias provienen de sus ancestros y se ha venido trasmitiendo de manera oral a través del tiempo sin tener más sustento que las enseñanzas de sus padres y abuelos como ellos mismo lo expresan. La teoría del flujo de la savia de las plantas se encuentra publicada en artículos, pero no expresan explícitamente el sustento de ellas, sin embargo, se puede ver con toda claridad que la base de ella es el crecimiento y decrecimiento aparente de la Luna, sin embargo, la Luna no crece ni decrece, mantiene su misma masa, lo único que aumenta y luego disminuye en tamaño es la parte iluminada de la cara que da hacia la Tierra.

De acuerdo con la astronomía y la teoría de las mareas oceánicas, base del modelo de atracción gravitacional presentado en este trabajo, la atracción gravitacional en el plenilunio y el novilunio son las mayores del mes lunar y bastante similares, como lo muestran las mareas de sicigia, en tanto que en el Cuarto Creciente y el Cuarto Menguante son las fases lunares de menor atracción gravitacional y se dan las mareas más bajas del mes lunar llamadas bajamares. Por lo anterior, se puede ver que existe una diferencia fundamental entre la teoría del flujo de la savia de las plantas y el modelo de atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre las plantas presentado en el presente trabajo. La primera concibe que los polos de concentración de la savia de las plantas ocurren en la Luna Nueva y la Luna Llena, en tanto que para nuestro modelo dichas fases son muy similares, los polos de atracción gravitacional se encuentran entre los cuartos lunares y el plenilunio o novilunio.

Lo anterior, trastoca la esencia de la teoría del flujo de la savia de las plantas, puesto que si existe un efecto observable entre la Tierra, la Luna y el Sol, es el efecto gravitatorio entre ellos, el cual muestra la variación de su intensidad en las mareas oceánicas. Por lo que los agrónomos deberán empezar a experimentar sobre el efecto que causa en las plantas la variación en la atracción gravitacional de la Luna y el Sol, tomando como base el modelo presentado en la presente Tesis.

5.3 Secuencia de actividades didácticas

Como se vio en el capítulo anterior, el efecto gravitatorio de la Luna y el Sol sobre las aguas oceánicas se puede abordar de dos maneras: la ortodoxa que se fundamenta en la teoría de campos vectoriales y la cosenoidal que se basa en las propiedades gráficas de la función coseno. En este subcapítulo, se presenta una secuencia didáctica que guía paso a paso a quien la ejecute ir manejando las propiedades gráficas de la función coseno y sus respectivas expresiones analíticas, hasta que sea capaz de aplicar dichas propiedades al fenómeno de las mareas oceánicas y luego realizar ciertos ajustes hasta llegar a obtener un modelo que permita predecir los efectos gravitacionales de la Luna y el Sol sobre las plantas.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS SOBRE LA FUNCIÓN COSENO

Con el software Graphmatica o cualquier otro graficador, realiza las siguientes actividades:

1. Grafica y = cos(x), (de aquí en adelante la llamaremos la función original y su gráfica la gráfica original)
    a) ¿Cuál es el valor máximo y el valor mínimo que alcanza la variable "y"? máximo ____________Mínimo __________.
    b) ¿Qué valores toma "x" cuando "y" alcanza sus alturas máximas? ____
    c) ¿Qué valores toma "x" cuando "y" alcanza sus alturas mínimas? ____
    d) Entre dos máximos o dos mínimos consecutivos (llamados periodos), ¿Cuánto cambia la variable "x"? ______________, por lo tanto la función y = cos (x) tiene un período de ____________________
    e) ¿Cuánto es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo? _______

2. Grafica y = cos(x) + 1
    a) ¿Qué efectos tuvo sobre la gráfica original?____________________
    b) ¿Cambió el período de la función original? ____________________
    c) ¿Cambió la diferencia entre el valor máximo y el mínimo alcanzado por la función original? ________________________________

3. Grafica y = cos(x) – 1

a) ¿Cómo afecto a la gráfica original? ______________________

b) ¿Afectó el período de dicha función? ______________________

c) ¿Afectó la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la función original? ______________________

4. Grafica y = cos(x) +2

   a) ¿Qué efectos tuvo sobre la gráfica original? ______________________

   b) Prueba graficar y = cos(x) + a, donde "a" sea cualquier valor positivo o negativo y observa cómo afecta a la gráfica original. Expresa tus conclusión respectivas ______________________

   ____

5. Grafica la función y = 2cos(x)

   a) ¿Qué efectos provoca sobre la gráfica original? ______________________

   ____

   b) ¿Cuál es la diferencia entre el valor máximo y mínimo de y? __________

   c) ¿afecta al período de la gráfica? ______________________

   d) Grafica la función y = acos(x) donde "a" es cualquier valor positivo y expresa tus conclusiones al respecto ______________________

   ____

6. Grafica la función y = -cos(x)

   a) ¿Qué le sucede a la gráfica original? ______________________

   ____

   b) ¿Qué pasa con los valores máximos y mínimos respecto a la gráfica original? ______________________

   c) Ahora grafica y = -2cos(x), ¿qué efectos provoca a la gráfica anterior? ______________________

   d) Grafica y = -acos(x), donde "a" es cualquier valor positivo ¿qué conclusión puedes obtener de ello? ______________________

   ____

e) La diferencia entre las alturas máximas y mínimas ¿cómo varía? ______

____

7. Ahora observemos que sucede con la gráfica si el coeficiente del coseno es un número fraccionario como ½, ¼, etc.

   a) Grafique y=1/2 cos(x), ¿qué efectos tiene sobre la gráfica original? ____

   ____

   b) ¿Cuánto es la diferencia entre la altura máxima y mínima?__________

   c) Prueba graficar y = (1/a) cos(x), donde “a” es cualquier número positivo o negativo y expresa tus conclusiones. ____________________

   ____

8. Grafica la función y = cos(x +1)

   a) ¿Qué efectos le provoca a la gráfica original? ________________

   ____

   b) ¿Le cambia su período? ______________________________

   c) ¿Le cambia su altura? ______________________________

9. Grafica la función y = cos(x +2)

   a) ¿Qué efectos causa a la gráfica original? ____________________

   ____

   b) Ensaya graficar y = cos(x +a) en donde a es cualquier valor positivo y expresa tus conclusiones respecto al efecto que esto tiene en la gráfica original. ____

   ____

10. Grafica la función y = cos(x – 1)

   a) ¿Qué efectos tiene respecto a la gráfica original?. ______________

   ____

   b) Grafica y = cos (x – a) en donde “a” es cualquier valor positivo y expresa tus conclusiones: ______________________________

   ____

11. Grafica la función y = cos (2x)

   a) ¿Qué efectos tiene respecto a la gráfica original?. ________________

   ____

   b) ¿Le cambió el período a la gráfica original? _______ ¿En cuánto? ____

   ____

   c) ¿Le cambia la altura a la gráfica original? ________________

   d) Ensaya graficar con y = cos (ax) en donde "a" es cualquier valor positivo o negativo. Expresa tus conclusiones. ________________

   ____

   ____

12. Grafica la función y = cos (πx)

   a) ¿Qué valores toma x cuando la variable y alcanza su valor máximo y mínimo? Valores máximos ________________

   valores mínimos ________________

   b) Por lo tanto podemos concluir que el período de la gráfica original es de

   ____

13. Grafica la función y = cos (x/2)

   a) ¿Cómo afecta a la gráfica original? ________________

   ____

   b) ¿De cuánto es ahora el período de la gráfica? ________________

   c) Grafica y = cos (x / (-2))

   d) ¿Cómo resultó la gráfica respecto a la anterior? ________________

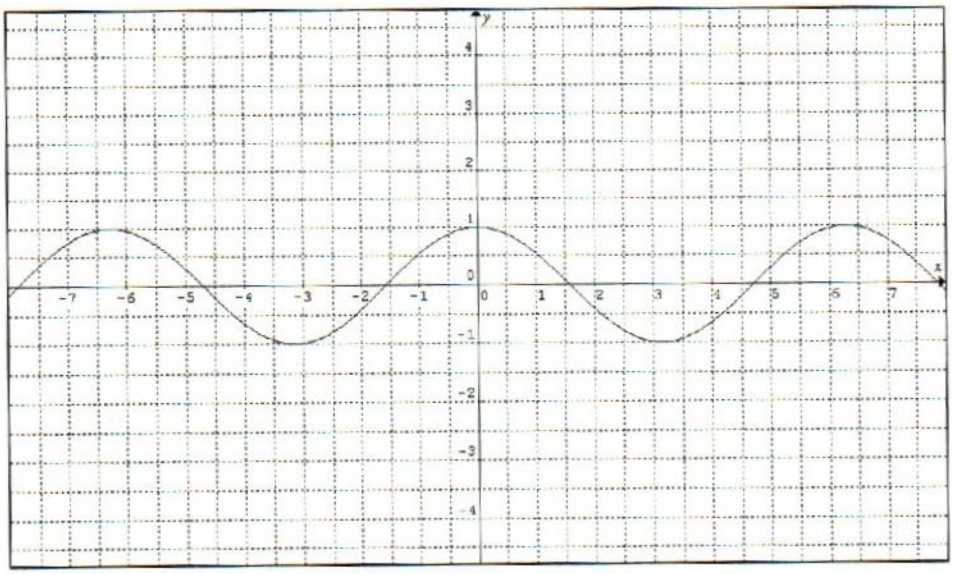
   e) Ensaya graficar y = cos (x/a), en donde "a" es cualquier valor positivo o negativo. Expresa tus conclusiones. ________________

   ____

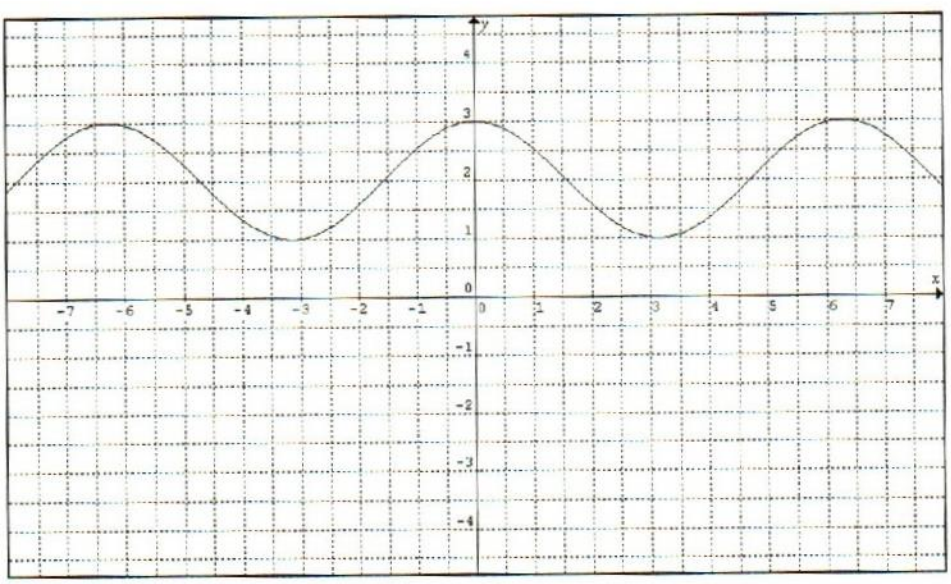
Como puedes ver, hemos variado todos los parámetros de la función original, de tal manera que ahora sabes que sucede si a la función $y = a\cos(bx \pm c) \pm d$ donde a, b, c y d son valores reales positivos o negativos se cambian y el efecto gráfico que eso representa. A continuación se te pedirá que al ver la gráfica de la función coseno expreses su función analítica que le corresponde.

14. Expresa la función analítica de cada una de las siguientes gráficas.

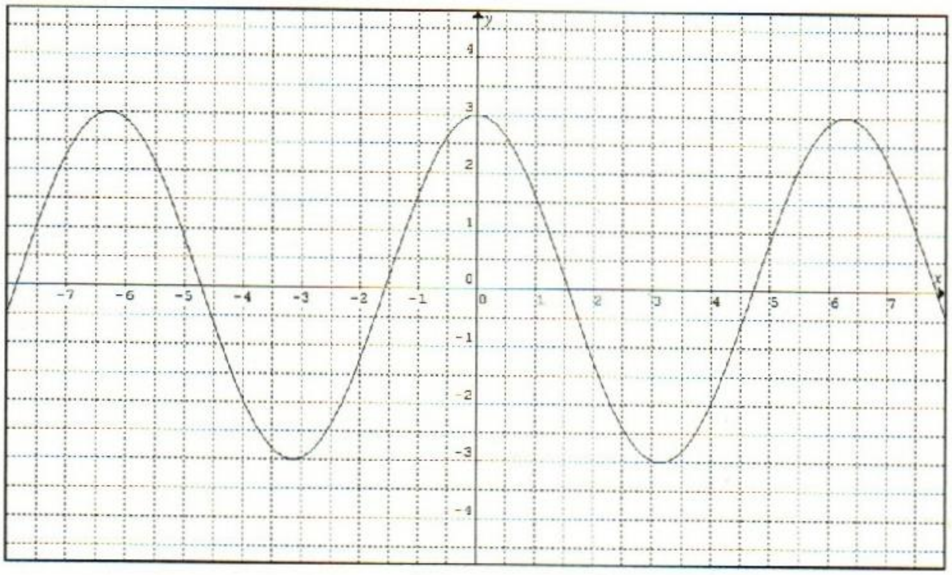
a) ______________________________



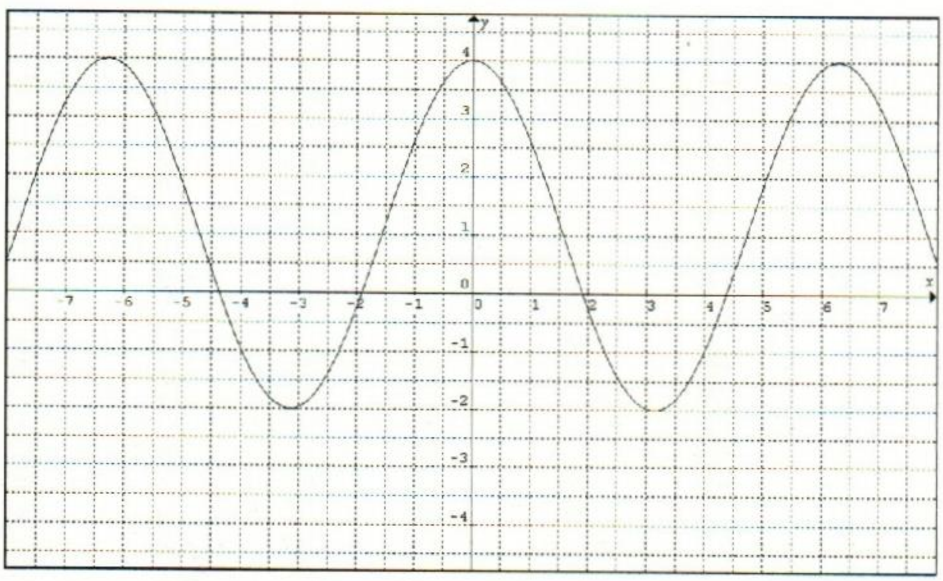
b) ______________________________



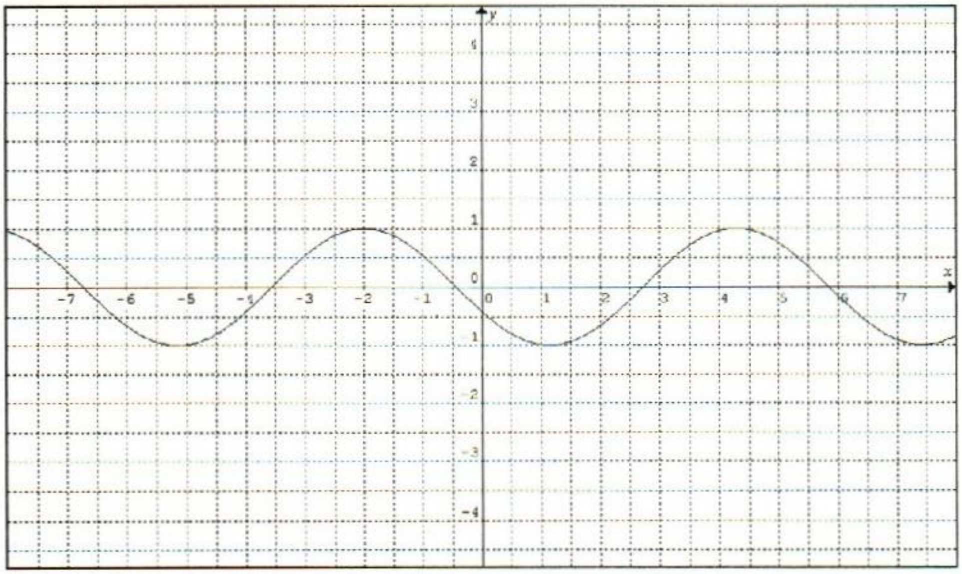
c) ____


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

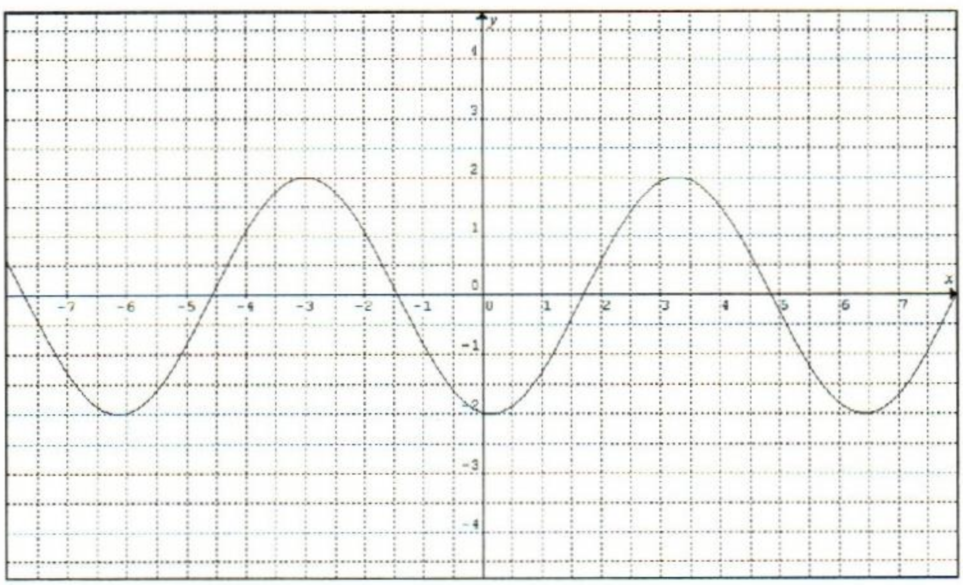
d) ____


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

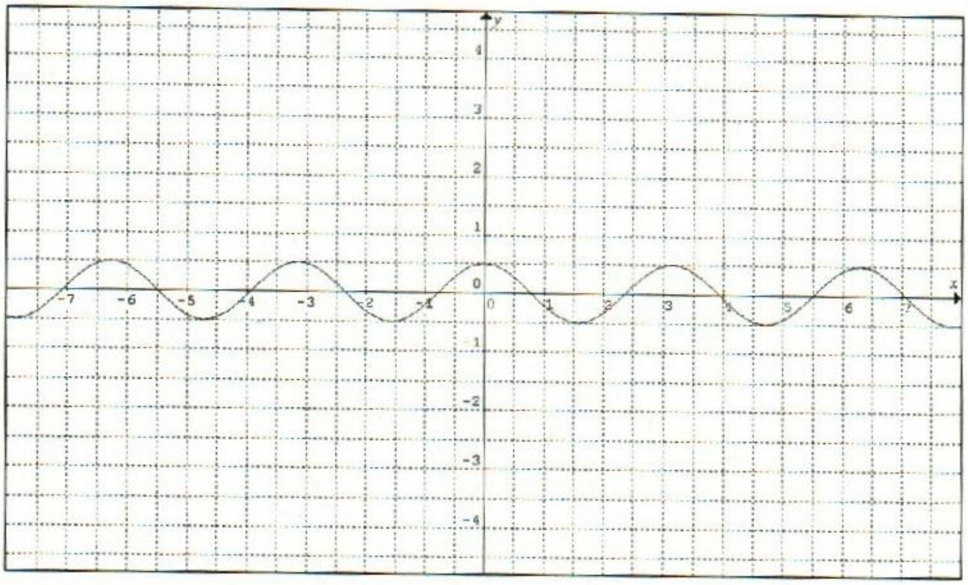
e) ____


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

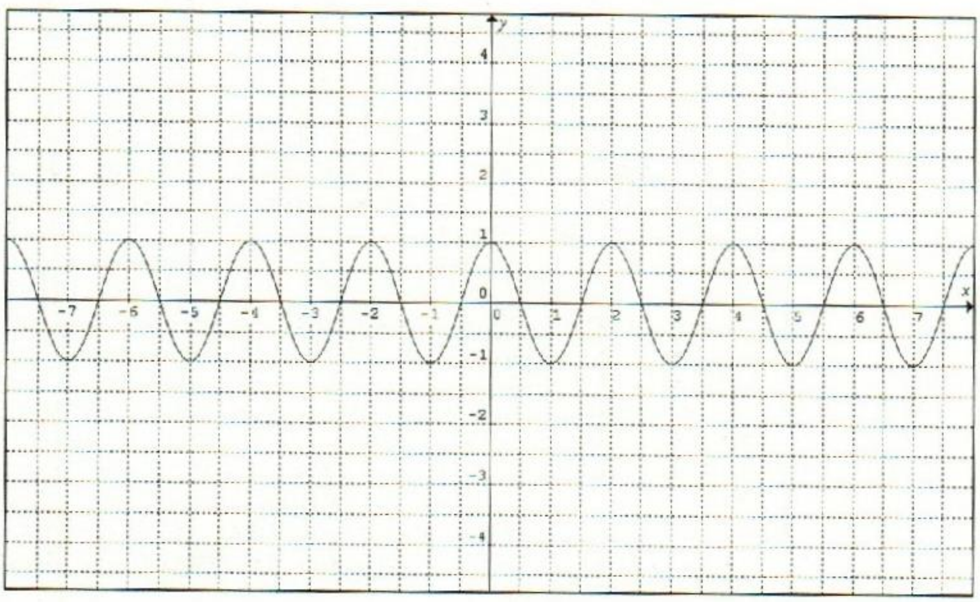
f) ____


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

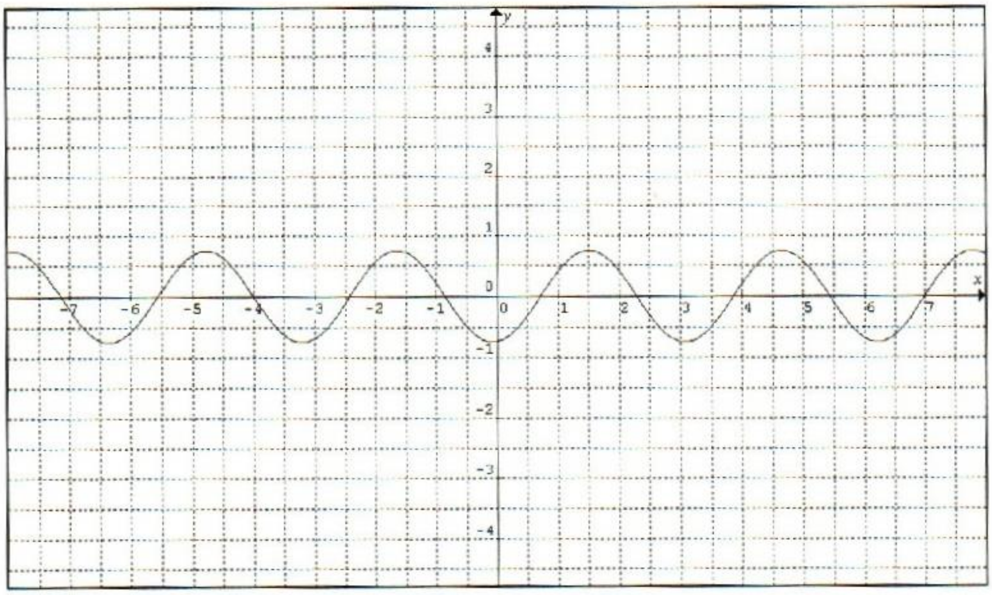
g) ____


y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
x
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

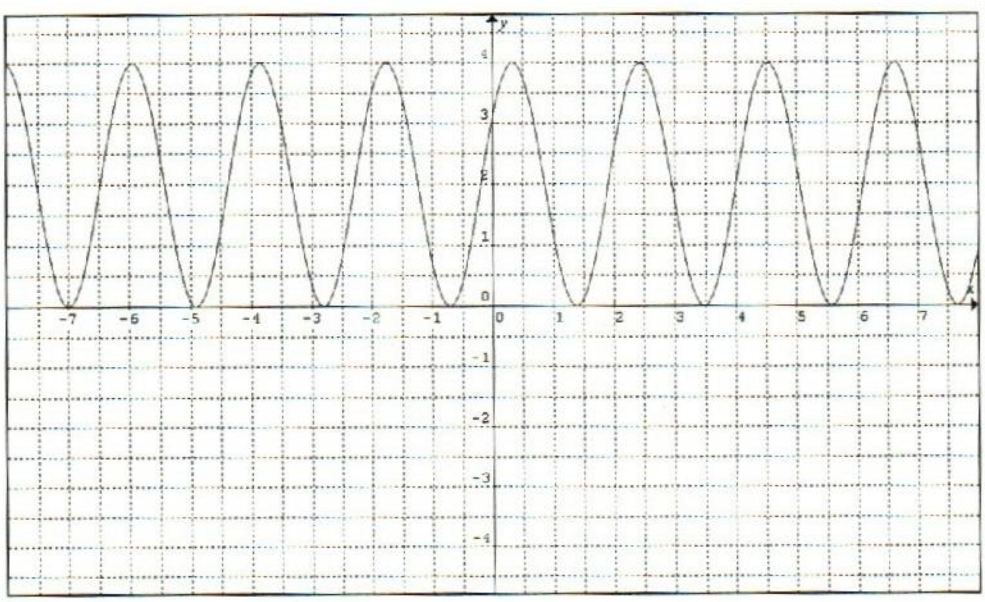
h) ____


y
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
x
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

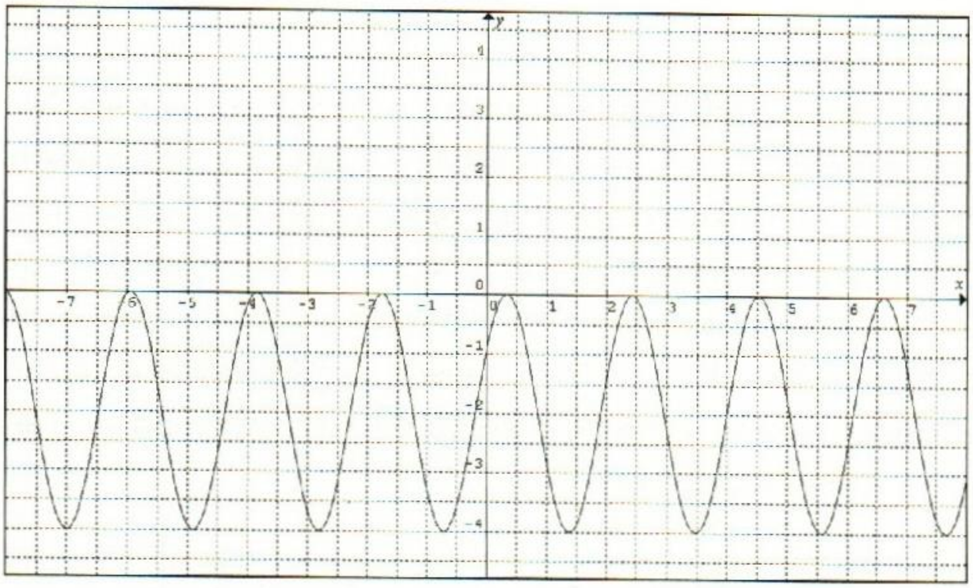
i) ______________________________


y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7

j) ______________________________

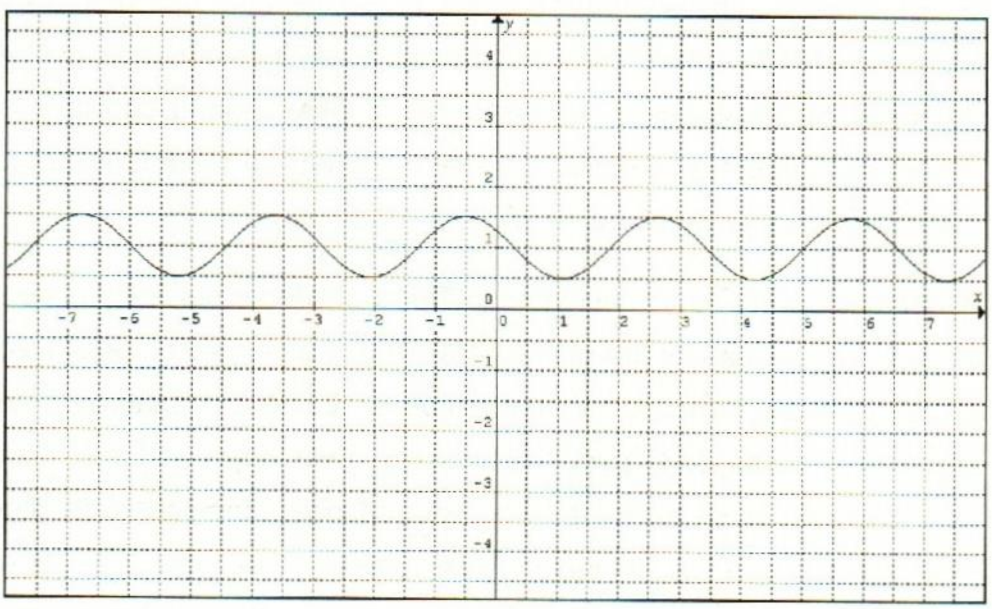

y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7

k) ____



y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

l) ____



y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

Una vez que se han variado los diferentes parámetros de la función coseno, se debe estar en posibilidades de modelar a través de dicha función, los siguientes problemas:

1.- Se ha calculado que la atracción gravitacional de la Luna sobre las aguas marinas en el mar profundo varía entre una marea alta y una baja alrededor de 54 cm con un período de 12 horas con 24.5 minutos, por lo que ocurren dos mareas altas y dos bajas en un tiempo de 24 horas con 49 minutos aproximadamente. A través de la función coseno modele dicha situación, expresándolo en forma analítica y gráfica. En la gráfica represente en el eje vertical la altura de la marea y en el eje horizontal las horas transcurridas (la marea máxima debe alcanzar los 54 cm de altura y la baja 0 cm).

2.- El Sol también provoca dos mareas bajas y dos altas en un tiempo de 24 horas 4 minutos, solo que dichas mareas tienen una diferencia de 24 cm entre su altura máxima y la mínima. A través de la función coseno modela dicha fenómeno expresando la función en forma analítica y gráfica, ésta última en el eje vertical debe representar la altura de la marea y en el eje horizontal las horas transcurridas (su altura máxima debe ser 24 cm y la mínima 0 cm).

3.- El efecto combinado de la Luna y el Sol provoca una marea que tiene una variación entre la marea alta y la marea baja de 78 centímetros, con un período de 12 horas 24 minutos y 23 segundos. Si se desea iniciar con la hora cero en la marea alta (78 cm) y la marea baja de 0 cm, encuentre la función matemática en base a la función coseno que lo modele y grafíquela.

4.- El movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol y el de traslación de la Luna en torno a nuestro planeta, hacen que el ángulo entre la Tierra, la Luna y el Sol varíe de 0° a 360° en un tiempo de 29.53 días, situación que se puede observar a través de la parte iluminada que vemos en la Luna. Cuando los tres cuerpos celestes se encuentran alineados forman ángulos de 0° (Luna Nueva) y 180° (Luna Llena), lo cual provoca las mareas de sicigias (las más altas del mes lunar) siendo dichas mareas un 25% más altas que las bajamares que ocurren en el cuarto creciente (90º) y cuarto menguante (270º). Considerando que entre un novilunio y un plenilunio transcurre exactamente la mitad del mes lunar y que corresponde al período de la función coseno, y que el mes lunar se divide en 4 cuartos iguales que corresponden al Cuarto Creciente, Luna Llena, Cuarto Menguante y Luna Nueva de nuestro satélite, elabore un modelo en base a la función coseno que represente correctamente dicha situación y grafíquelo, para ello deberá considerar la altura de la marea provocada por esta combinación de efectos en el eje vertical y en el eje horizontal las horas transcurridas.

Nota: Para que pueda ver el efecto cambie sus escalas: en el eje vertical el valor mínimo déjelo en -10 y el máximo en 40, en cambio en el eje horizontal déjelo con un valor mínimo de 0 y un máximo de 800.

5.- Ahora sume las funciones del problema 3 y 4. Para que la altura de la marea se conserve en 78 cm como máximo, al coeficiente la función del problema 3, réstele el valor del coeficiente del problema 4. Además no debe sumar los dos sumandos de las funciones individuales, a toda la función simplemente súmele la misma cantidad que se le suma la función del problema 3. El resultado es un modelo bastante aproximado del comportamiento de las mareas de acuerdo a las fases lunares, si las órbitas de la Luna y la Tierra fueran circulares.

6.- La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es una elipse, la cual en términos medios tiene una excentricidad de 0.0549 y el semieje mayor una longitud de $384.4 \cdot 10^6$ metros, en base a ello se ha calculado que la intensidad de la atracción gravitacional varía alrededor del 20% entre un apogeo y un perigeo lunar, el cual ocurre en un lapso de tiempo de 13.7772775 días (medio mes anomalístico), por lo tanto considerando que el perigeo (punto de mayor atracción gravitacional de la Luna) ocurre en la hora cero y que el porcentaje se calcula sobre 54 cm que es la altura máxima de la marea provocada por la Luna, modele éste fenómeno con la función coseno.

7.- A la función del problema 5 súmele la del problema 6. En este caso no se requiere de ajustes, puesto que el efecto simplemente se suma, incluyendo los dos números independientes. Este último modelo es muy aproximado al efecto real de la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre las plantas, por lo cual en términos cualitativos puede emplearse como modelo para experimentar en el comportamiento de la savia de las plantas, sobre todo con aquellas que tengan alto contenido de ella en sus tejidos, o evaluar el crecimiento de plantas cuyo crecimiento sea muy acelerado y ver la relación que guardan con los efectos de atracción gravitacional de la Luna y el Sol.

Nota. La órbita de la Tierra alrededor del Sol también es una elipse, pero muy cercana a la circunferencia, ya que su excentricidad es de solamente 0.00329 y su longitud de su eje mayor de $149.6 \cdot 10^9$ metros, por lo que provoca una variación de alrededor del 1.5% de la atracción gravitacional del Sol, razón por la que no es tan significativa como la de la Luna, además de que el perihelio (punto más cercas de la Tierra y el Sol) y el afelio (punto más retirado de dichos astros) ocurre cada medio año (4 de julio para el afelio y 3 de enero para el perihelio). Si gusta puede modelarlo con los datos proporcionados y simplemente súmelo al modelo del problema 7.

Capítulo VI

Conclusiones, implicaciones y recomendaciones

En este capítulo se exponen las conclusiones e implicaciones en términos de nuevas preguntas a investigar. También se presentan recomendaciones que se desprenden de las conclusiones y que se pretende constituyan la base para algunas prácticas de los cursos de Matemáticas I y Matemáticas II de la Facultad a la que se hace referencia y de esa manera contribuir a progresar en la atención del problema didáctico planteado en la presente investigación.

6.1 Conclusiones

La reforma curricular de los planes y programas de estudio de la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH, culminada en mayo del 2006 y puesta en marcha en agosto del mismo año, establecieron como propósito fundamental para el área de matemáticas, vincular los contenidos teóricos con problemas reales de agronomía y señalan como lugar ideal para llevar a cabo dicha vinculación el Rancho San Ramón, propiedad de la misma Facultad o las instalaciones de la propia institución. A la fecha, no se ha realizado ninguna práctica que vincule los contenidos teóricos con problemas reales de agronomía, la razón fundamental es que la literatura recomendada no está diseñada para aplicarse a éste campo del conocimiento, además dos de los tres profesores que imparten Matemáticas I y Matemáticas II, no son agrónomos y el que sí lo es, tampoco ha llevado a cabo ninguna práctica como las señaladas en los programas de estudio y cree superarlo abordando contenidos teóricos a través de ejercicios diseñados que se relacionen con la agronomía o que mencionen actividades que se ligan al sector agropecuario (ver Anexo A).

Con lo expresado en el párrafo anterior, es claro que no bastan los buenos propósitos ni las reformas curriculares para hacer que las matemáticas sean una herramienta útil para el agrónomo, se necesita que los saberes seleccionados para enseñarse a los estudiantes de agronomía y plasmados en los programas de estudio, sean transpuestos a dicho campo de conocimiento y de esa manera sean funcionales tanto a profesores como a estudiantes y pueda usarse para resolver problemas reales del sector agropecuario. El presente trabajo, precisamente cumple con esa función para contenidos teóricos de álgebra, geometría y trigonometría en la materia de Matemáticas I, y plantea posibles experimentos que puedan realizarse con plantas y que permita aplicar la teoría de máximos y mínimos relativos en la materia de Matemáticas II.

Respecto al efecto que la Luna ejerce sobre las plantas cultivables y maderables, tanto en el sector campesino como en las comunidades científicas relacionadas con la agricultura, se encuentran dos corrientes de pensamiento divergentes: los que creen que la Luna tiene alguna influencia sobre las plantas y los que la niegan totalmente. En el caso de los campesinos, las creencias del efecto de Luna sobre los cultivos se encuentran más arraigadas en las personas de mayor edad que en las más jóvenes, y realizan actividades agrícolas como la siembra y cosecha de cultivos de acuerdo a sus creencias, en cambio, los de menor edad, prácticamente son una mezcla entre sus ancestros y las enseñanzas que han recibido de agrónomos, quienes les han enseñado fijarse más en las fechas y las condiciones ambientales sobre todo las de humedad, para sembrar, que en la Luna. En el caso de agrónomos y carreras a fines también existen artículos y libros publicados en muchas partes del mundo a favor y en contra de los efectos de Luna, quienes están en contra, generalmente se fundamentan en haber probado algunas creencias y encontrado que son falsas y los que creen en dicho efecto, han creado teorías que les permite dar una explicación del fenómeno sobre las plantas, fundamentándose principalmente en el crecimiento aparente de la Luna.

Una de las teorías creadas por los agrónomos para explicar el efecto que la Luna tiene sobre las plantas cultivables y maderables es la teoría del flujo de la savia de las plantas, la cual plantea que este vital líquido asciende y desciende en los vegetales de acuerdo con el crecimiento o decrecimiento de la parte iluminada de la Luna, por lo que la savia se encontrará más concentrada en las raíces en el novilunio, en la copa de los árboles incluyendo flores y frutos en la Luna Llena y en la parte media (tallos y ramas) en los Cuartos Creciente y Menguante.

Los campesinos que creen en la influencia lunar sustentados en sus ancestros, consideran que en la Luna Nueva no debe sembrarse ni cosecharse los cultivos como el maíz y el frijol, estas actividades deben realizarse después del Cuarto Creciente hasta tres días antes del novilunio. Las mismas recomendaciones son para el corte de árboles maderables. Situación que no coincide con la teoría de la savia de las plantas que recomienda precisamente lo contrario. Ni las creencias campesinas ni la teoría de la savia de las plantas están sustentadas en la atracción gravitacional que ejercen la Luna y el Sol sobre la Tierra y que se ha demostrado científicamente son la causa principal de las mareas oceánicas y además son en cierto modo predecibles. El presente trabajo, precisamente, su fundamento es la teoría de la gravitación universal y la teoría de las mareas oceánicas, ya que la primera explica a la segunda y ésta última es un fenómeno natural que existe en los océanos y que muestra con claridad la variación del efecto de atracción gravitacional de la Luna y el Sol de manera permanente.

El estudio de las mareas oceánicas y su matematización permitieron modelar el comportamiento ascendente y descendente de las aguas marinas como consecuencia de la atracción gravitacional conjunta de la Luna y el Sol, lo cual aporta elementos que las teorías agronómicas como la del flujo de la savia de las plantas no considera en el influjo lunar sobre vegetales, hecho que permite replantear dicha teoría, puesto que ésta al no tomar en cuenta el efecto gravitatorio de ambos astros, sino solamente el crecimiento aparente de la Luna, llega a conclusiones que no coinciden con dicha atracción gravitacional, por ejemplo, consideran que la Luna Nueva y la Luna Llena son los polos opuestos en el comportamiento de la savia, en cambio gravitacionalmente son muy similares, como lo muestran las mareas de sicigias que ocurren precisamente en el novilunio y plenilunio. Por otra parte, las mareas más bajas del mes lunar (bajamares o mareas muertas) ocurren tanto en el Cuarto Creciente como en el Cuarto Menguante lunar, debido a que la Luna y el Sol se encuentran en cuadratura y por lo tanto el efecto conjunto de atracción gravitatorio se contra restan, en cambio la teoría del flujo de la savia considera que en estas fases lunares la savia se concentra principalmente en la parte media de las plantas. Además, La teoría de las mareas explica perfectamente las dos mareas altas y las dos mareas bajas que ocurren en el transcurso de 24 horas con 49 minutos aproximadamente, ya que la rotación terrestre hace que el ángulo de un lugar específico de la Tierra varié 360° con respecto a la Luna y con respecto al Sol, por lo que al pasar dicho punto frente a la Luna que es el cuerpo celeste que más influye sobre las aguas oceánicas, éstas se elevan en mayor nivel, pero al estar en cuadratura con ella se tendrán las mareas más bajas. Este hecho la teoría del flujo de la savia de las plantas ni siquiera lo toma en cuenta.

Por otra parte es preciso destacar que la transposición didáctica es un fenómeno didáctico y por lo tanto ocurre en el medio escolar querámoslo o no y varias corrientes de pensamiento lo estudian, una de ellas es la corriente francesa conocida como didáctica de las matemáticas, sin embargo, dicha corriente lo estudia partiendo del propio saber sabio (como se desarrolló, las dificultades que se tuvieron en su creación, etc,) hasta llegar a transponerlo en las instituciones escolares. En el caso nuestro, la aproximación socioepistemológica nos permite realizar la transposición didáctica no necesariamente a partir del saber sabio, si bien estudiamos la forma en que se ha abordado el tema de la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre las aguas marinas, finalmente no usamos dicho discurso dominante para modelar el fenómeno, sino que buscamos otra herramienta que fuese más funcional a los agrónomos como lo es la función coseno, lo cual constituye una diferencia importante entre nuestra comunidad de matemática educativa mexicana y la de didáctica de las matemáticas francesa.

En forma muy concreta, se puede concluir que la presente Tesis contribuye de manera importante en dos aspectos fundamentales:

1. Transpone algunos contenidos teóricos de Matemáticas I y Matemáticas II del plan de estudios vigente puesto en marcha en agosto del año 2006 en la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH, lo que permite rediseñar el discurso matemático escolar en las asignaturas mencionadas, sobre todo en el aspecto práctico, en donde contribuye a que algunos saberes matemáticos se apliquen en la solución de problemas reales de agronomía, en donde también se desarrolla un procedimiento

original haciendo uso de las propiedades gráficas de la función coseno para modelar la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre las plantas.

2. Transpone conocimientos astronómicos, matemáticos y de mareas oceánicas sobre la atracción gravitacional de la Luna y el Sol a la Agronomía, lo cual trastoca la teoría del flujo de la savia de las plantas y sienta las bases científicas sobre las que se debe experimentar en agronomía para determinar sobre bases sólidas la relación que existe entre la atracción gravitatoria de dichos astros y el comportamiento de la savia de las plantas o aspectos como el rendimiento, durabilidad del grano, etc, en ciertos cultivos o de la madera en el caso árboles de éste tipo. Lo anterior tiene implicaciones en la formación de los futuros Ingenieros Agrónomos.

Aunque el modelo de atracción gravitacional de la Luna y el Sol fue desarrollado para aplicarse en plantas, es obvio, que dicho modelo es general y válido para cualquier ser vivo que habite sobre la superficie terrestre tanto en su parte sólida como en sus océanos y mares, puesto que la atracción gravitacional de dichos astros no se ve afectada porque se trate de un ser vivo u otro.

Con todo lo expresado anteriormente, se puede también decir, que la presente Tesis deja abierta la posibilidad de investigar bajo el modelo de atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre las plantas, otros temas tanto agronómicos como no agronómicos, y que a continuación se plantean como preguntas a investigar.

a) ¿Qué relación hay entre la savia de las plantas y la atracción gravitacional de la Luna y el Sol?
b) ¿Qué relación existe entre el rendimiento de los cultivos, la época de siembra y la atracción gravitacional de la Luna y el Sol?
c) ¿Qué efectos tienen la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre labores de cultivo como podas, deshije, etc o bien el corte de árboles maderables?
d) ¿Afecta la atracción gravitacional de la Luna y el Sol en los partos de los animales y en que las crías sean más o menos fuertes al nacer?

e) ¿Los nacimientos de niños tienen relación con el efecto gravitatorio de la Luna y el Sol?
f) ¿Los dolores traumatológicos de personas que se han fracturado tienen alguna relación con los efectos gravitacionales de la Luna y el Sol?
g) ¿El comportamiento humano guarda alguna relación con los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol?

6.2 Recomendaciones

En el capítulo anterior, se encuentra una secuencia didáctica que se basa en las propiedades gráficas de la función coseno y que permite a quienes la estudien llegar a determinar la función analítica que modela la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre las plantas, dicha secuencia es una de las maneras para construir el modelo matemático de dicho fenómeno y totalmente al alcance de cualquier persona que tenga las bases de trigonometría. Por lo que se recomienda usarlo en los cursos de Matemáticas I y Matemáticas II, en la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la UNACH para poder vincular los contenidos teóricos con problemas reales de agronomía. Dicho modelo deberá ser el sustento teórico de cualquier experimento que se pretenda realizar para evaluar el efecto que causa en plantas, animales y seres humanos la variación en la atracción gravitacional de dichos astros.

Debido a que la teoría de la savia de las plantas y las creencias campesinas sobre el efecto lunar no están sustentadas en la atracción gravitacional de la Luna y el Sol, y por lo mismo no coinciden con ella, se recomienda realizar estudios experimentales en el área de agronomía tomando en cuenta la atracción gravitacional de dichos astros, cuyo sustento científico se encuentra en la teoría de la gravitación universal y la teoría de las mareas. Para ello se sugiere experimentar con plantas que tengan alto contenido de savia como el piñón (***Jatropha curcas***), o que el ritmo de crecimiento sea muy rápido y evaluar si éstos tienen alguna relación con el modelo de atracción gravitacional de la Luna y el Sol presentado en esta investigación.

Puede también experimentarse con la siembra de diferentes cultivos de acuerdo con el modelo de atracción gravitatorio que aquí se presenta y evaluar si tiene alguna influencia la atracción gravitacional de la Luna y el Sol, en la producción, durabilidad del grano, jugosidad de la fruta, etc. De esta manera se estará usando los conocimientos matemáticos a problemas reales de agronomía.

Finalmente el modelo de la atracción gravitacional de la Luna y el Sol sobre las plantas, al ser un modelo general de atracción gravitacional de dichos astros sobre la superficie terrestre, se puede usar no sólo en el campo agronómico, sino también a los animales, seres humanos y en general sobre cualquier ser vivo que habite sobre la Tierra, solo que para los casos no relacionados con las plantas habrá que estudiar tanto las creencias como teorías que existan al respecto.

BIBLIOGRAFÍA

Alanis, J. A. (1996). La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del cálculo. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Allard, R. (1965). Sistema Internacional de Medidas. México: LIMUSA

Amengual A. (2002). *Sobre la órbita heliocéntrica de la Luna*. Revista Española de Física. 16(5), 50-51.

Anglés, J. M., Farrerons, I (1996). Influencia de la Luna en la Agricultura, México. Agroguías mundi – prensa.

Aranda, P. (1988). Matemáticas II. México. Dirección de Bibliotecas y Publicaciones del Instituto Politécnico Nacional.

Arrieta, et al, (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17(1), 418-422.

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Astrocosmos, en http://www.astrocosmo.cl/h-foton/h-foton-02_01.htm
Astronomía maya. En http://www.astronomía.com/historia/astromaya.htm
Ayres, P. Jr. (1970). Trigonometría Plana y Esférica. México. Mc Graw Hill.

Ayres, P. Jr. (1971). Cálculo Diferencial e Integral. México. Mc. Graw Hill.

Ayres, P. Jr. y Moyer, R. (1991). Trigonometría. México. 2ª. ed. Mc Graw Hill.

Baldor, A. (1992). Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría. México. Cultural Mexicana.

Baldor, A. (2005). Álgebra. México. Cultural Mexicana.

Barnett, R. (1976). Álgebra Elemental Moderna. México. Mc Graw-Hill.

Barnett, R. (1991). Geometría Plana con Coordenadas. México. 2ª. ed. Mc Graw-Hill.

Batschelet. (1978). Matemáticas Básicas para Biocientíficos. España. DO SSAT. Madrid.

Belmonte, J.A. (1999). *Las leyes del cielo. Astronomía y civilizaciones antiguas. España.* Temas de Hoy

Benoit, P. (2005). Un acercamiento epistemológico al producto vectorial desde la perspectiva de la convención matemática. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Chiapas. México

Bernard C. (1981). *Descubrimiento newtoniano de la gravitación.* Investigación y Ciencia. (56), 111-120.

Bers, L. y Karal, F. (1983). Cálculo. México. Interamericana.

Bravo, A. S. (2007). Obstáculos didácticos y el discurso explicativo de los libros de texto de Cálculo. Tesis de Doctorado, Cinvestav_IPN. México.

Bueche, F. (1979) Ciencias Físicas. España. Reverté.

Buendía, G. (2004). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. Educational Studies in Mathematics. 58 (3), 299-333

Cantoral, et, al, (2005). Desarrollo del pensamiento matemático. México. Trillas.

Cantoral, R y Farfán, R. (2004). Desarrollo conceptual del cálculo. México: Thomson.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Tylor. Mathesis, 11(1), 55 – 101.

Cantoral, R. Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. épsilon - Edición especial. España, 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa. Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa 6(1), 27-40.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa. Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6(1), 27-40.

Cartier P. (1996). *Kepler y la música del mundo*. Mundo Científico. 15 (161).

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: Aique

Chevallard, Y; Bosch, M; Gascón, J. (1997). Estudiar matemáticas: El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. España: ICE-Horsori.

Cid R. (1991). *El fenómeno de las mareas: su aplicación a la enseñanza de la Física.* Revista Española de Física 5(2), 48-51

Citas históricas (2008). Marejada (897) http://marejada-fuerte.blogspot.com/2008/09/mareas-citas-historicas.html

Cohen, B. (1981). *Descubrimiento newtoniano de la gravedad.* Investigación y Ciencia, (56), 110-120.

Cordero, F. y Solís, M. (1997). Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo. México. 2ª Edición, Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.

Cordero, F. y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo.* México. Edición Especial. Casio. Serie: Cuadernos de

Covian, O. N (2005). El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura maya. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav. México.

Didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica. 3a. Edición.

De Herrera, G. A. (1819). Agricultura General. España. Real escuela de Veterinaria.

Diccionario informático. En http://www.lawebdelprogramador.com/diccionario/

Dinámica Celeste. El fenómeno de las mareas. En http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/celeste /mareas/mareas.htm

Documental. ¿y si no tuvieramos la Luna?. Video de Discovery Channel. Dirección: http://www.youtube.com/watch?v=aeajvKpo6vE

Drake S. (1980). *La manzana de Newton y el diálogo de Galileo.* Investigación y Ciencia. (49), 106-112.

Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(1), 47 – 70.

Flores, C. (1985). Derivación de funciones algebraicas. México: TRILLAS.

Gaitano, M. (2003). Iniciación en la astronomía (curso electrónico) dirección: http://www.mailxmail.com/curso-iniciacion-astronomia

Galindo, J. (1990). Observación y culto solar en el México Prehispánico. Revista Ciencias (19), 35- 41

Galindo, J. (1992). Apogeo y ocaso de una manera de hacer astronomía. Revista Ciencia (28), 57 – 64.

Galindo, J. (1992). Arqueoastronomía en la América antigua. México. Equipo Sirius S. A.

Galindo, J. (1997).Cometas en el México Prehispánico. Revista Ciencias (46), 40 – 44.

Galindo, J. (1999). Alineación astronómica en la Huasteca. El caso del consuelo en Tamuin. Revista Ciencias (54), 36- 40.

Garza O., B. (1990). Matemáticas I. México. Dirección General de Educación Tecnológica Industrial. Secretaría de Educación Pública.

Gene, P. (2005) Física para la ciencia y la tecnología. España: Reverté.

Goncalves, O. (1965). El maguey y el pulque en los códices mexicanos. México: F.C.E.

Goodstein, D. La ley de inercia. California Institute Technology (video)

Goodstein, D. La manzana y la Luna. California Institute Technology (video)

Goodstein, D. Las leyes de Newton. California Institute Technology (vide)

Granville, W. (1994). Cálculo Diferencial e Integral. México: LIMUSA, Décima octava reimpresión

Haser, B., Lasalle, P. y Sullivan, J. (1984). Análisis Matemático. México: Trillas, Volumen I y II.

Hawking, S. (1992) Historia del Tiempo. Del Big Bang a los agujeros negros. México: Planeta Mexicana, S. A. de C. V.

Hernández M.(1996). *Fuerza y Movimiento*. Revista Española de Física 10 (2), 44-51.

Hewitt P. (2004), Física conceptual. España: Pearson Educación, novena edición

La precesión de los equinoccios. http://homepage.mac.com/uriarte/

Lizano, O. (2003). Las mareas y su relación con fenómenos astronómicos y meteorológicos. Centro de Investigación en Ciencias del Mar y Limnología (CIMAR) Universidad de Costa Rica. Costa Rica. Costa Rica

Mar de Fora (2008). Citas históricas de las Mareas. En http://lacomunidad. elpais.com/masotmem/2008/9/3/citas-historicas-la-mareas

Martínez, A. (2001) "El diseño de las pirámides basadas en el triángulo sagrado egipcio". BAEDE (11), 7-19.

Martínez, A. (2002) "Estudios arqueoastronómicos en la Necrópolis Menfita, Ensayos de Egiptología. 47, (http://www.geocities.com/jjcastillos/index48.html)

Martínez, M. J. Cirio y el Calendario Civil Egipcio. La puerta de Maat (8) Instituto Valenciano de Egiptología.

Moreno, M. A. (1997). La Morada Cósmica del Hombre. Ideas e investigaciones sobre el lugar de la Tierra en el Universo. México: F. C. E.

Moreno, M. A. (compilador). (1986). Historia de la Astronomía en México. México: La ciencia/4 desde México.

Mozilla firefox 2009

Muñoz, G. (2006). Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al Cálculo integral: aspecto epistemológicos, cognitivos y didácticos. Tesis de doctorado, Cinvestav_IPN, México.

Muñoz, G. (2008). Una resignificación de las Ecuaciones Diferenciales, fundamentada en la Predicción: elementos epistemológicos, cognitivos y didácticos. México: Universidad Autónoma de Chiapas.

Newton, I. (1987). Principios matemáticos de la Filosofía Natural. Traducción Antonio Escohotado. España: Tecnos

O'Connor , J; Robertson,F.(1996): *Democritus de Abdera.* School of Mathematics and Statistics; University of San Andrews. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/%7Ehistory/ Mathematicians/Democritus.html

Pose, I. (2004). El poderoso influjo de la Luna. Guía.com. 4 (47).

Puig, I. (2006). La Luna y la vegetación. En http://www.santiagopeman.com/ noticiasDetalle.aspx?obj=204

Rees, P. y Sparks, F. (1994). Álgebra. México: Reverté Ediciones S. A. de C. V.

Restrepo, J. (2005). Influencia de las fases lunares en la savia de las plantas, en http://www.simas.org.ni/_publicacion/Libro_de_la_Luna.pdf

Ripa, P. (1996). La increíble historia de la malentendida Fuerza de Coriolis. México. F.C.E.

Ripa, P. (1997). Laplace y los geómetras. CIENCIAHOY 5 (28)

Séjourné, L. (2004). Cosmogonía de Mesoamérica. Traducción de Martí Soler. México. Siglo veintiuno editores S. A. de c. v.

Souffrin, P. Teoría de la marea de Galileo. El diálogo revisado. http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/fundoro/act_9_pdf_web/12_Pierre_Souffrin.pdf

Spitzbart, A. y Bardell, R. (1983). Álgebra y Trigonometría. México: CECSA.

Stanislaw, I. (1986). Mitología y arqueoastronomía. En Moreno, Marco A. (compilador) Historia de la Astronomía en México (pp 102 – 123), México. La ciencia/4 desde México.

Swokoski, E. (1998). Cálculo Diferencial e Integral. México: Limusa.

Tippens, P. (1999). Física. Traducción Angel Carlos González Ruiz. México: McGRAW-HILL

Tomczak, M. (1996). La Fuerza Generadora de Mareas. Durazo, R. (traductor). Mareas. En http://gyre.umeoce.maine.edu/physicalocean/Tomczak/IntroOc/curso11.html

West, S. (2007). El influjo de la Luna (video).

Wikipedia (2009). http://es.wikipedia.org/wiki/Pir%C3%A1mide_de_Kukulc%C3%A1n

Yurevich, V. A. (1995). Astronomía en la América Precolombina. México: Equipo Sirius S. A.

Zill, D. (1990). Cálculo Diferencial e Integral. México: Trillas

ANEXO A

Apuntes de los estudiantes que muestran los ejercicios diseñados a la agronomía que resuelven y los contenidos temáticos que alcanzan a ver durante un semestre

"PROBLEMAS DE APLICACIÓN" DE MATEMÁTICAS I, TRABAJO QUE INCLUYE TODO EL SEMESTRE Y QUE LA ALUMNA ROSA ALICIA CIGARROA GRAJALES PASÓ EN LIMPIO Y ENTREGÓ COMO PARTE DE LA EVALUACIÓN DEL DOCENTE RESPECTIVO.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE CHIAPAS
FACULTAD DE CIENCIAS AGRONOMICAS
CAMPUS V

MATEMATICAS

TRABAJO PROBLEMAS DE APLICACIÓN

ALUMNA: ***ROSA ALICIA CIGARROA GRAJALES***

ING. LUIS ALBERTO BESARES COUTIÑO

VILLAFLORES CHIAPAS NOVIEMBRE DE 2007

1.- Sierto Agricultor necesita 8L de un insecticida al 7% de Concentración tenia en un frasco 12L del mismo insecticida al 12% y en otro frasco 20L al 6%. ¿Cuántos litros debe de tomar de los frascos para obtener lo que decea?

metodo
de litros
12% = x
6% = (8 − x)
7% = 8

Concentrado

% 12 ÷ 100 = .12 (# de litros)

% 6 ÷ 100 = .06 (8 − x) = .48 − .06x
% 7 ÷ 100 = .07 (8) = .56

.12x + .48 − .06x = .56
.06x = .56 − .48
.06x = .08
x = .08 / .06

x = 1.33 Lts del 12%

8 − x = 8 − 1.33 = 6.67 L
6.67 Lts del 6%

2.- Se necesita llenar un tanque elevado para irrigación con dos bombas. Se sabe que una de ellas lo llena en 3 horas y la otra en 4 horas, en qué tiempo lo laran si trabajan juntas?

X = tanque X = Tiempo en horas

$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$

$\frac{4x + 3x}{12} = 1$

$4x + 3x = 12$
$7x = 12$
$x = \frac{12}{7}$ hrs

3.- Se decea cercar 2 terrenos adyacentes con 200m de mallas y que queden encerrados 1400 m² de superficie; si son rectangulares que dimenciones deben tener.

A = 1400 m²
P = 200 m

A = bh
1400 = bh
2b + 3h = 200
$\frac{1400}{b} = h$

$2b + 3\left(\frac{1400}{b}\right) = 200$ $h = \frac{1400}{b}$

$\left[2b + \frac{4200}{b} = 200\right](b)$ $h_1 = 20$

$2b^2 + 4200 = 200b$ $h_2 = 46.66$
$b^2 - 100b + 2100 = 0$

$b = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 8400}}{2}$

$b = \frac{100 \pm \sqrt{1600}}{2}$

$b = \frac{100 \pm 40}{2}$ $b_1 = 70$

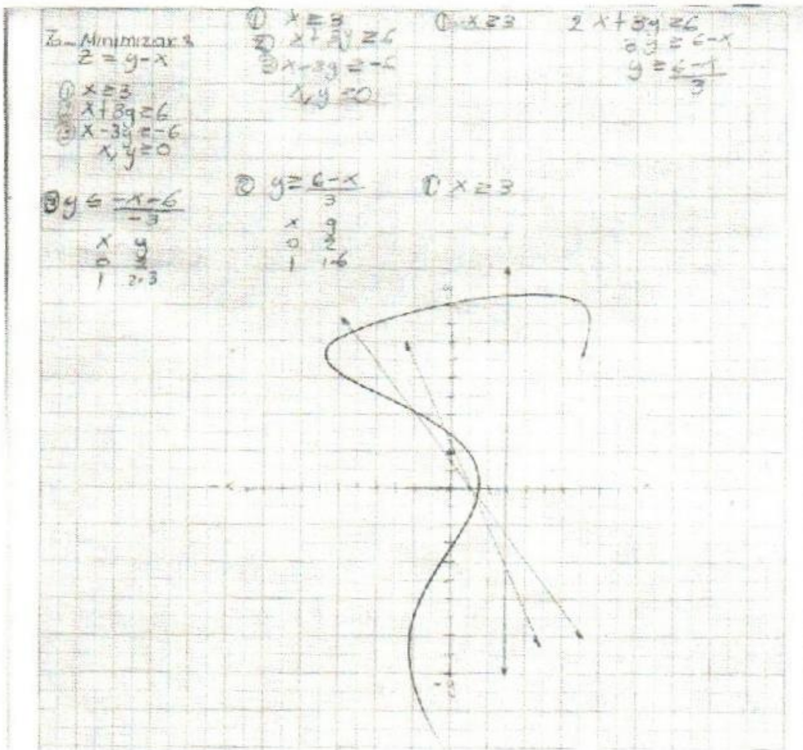
$b_2 = 30$

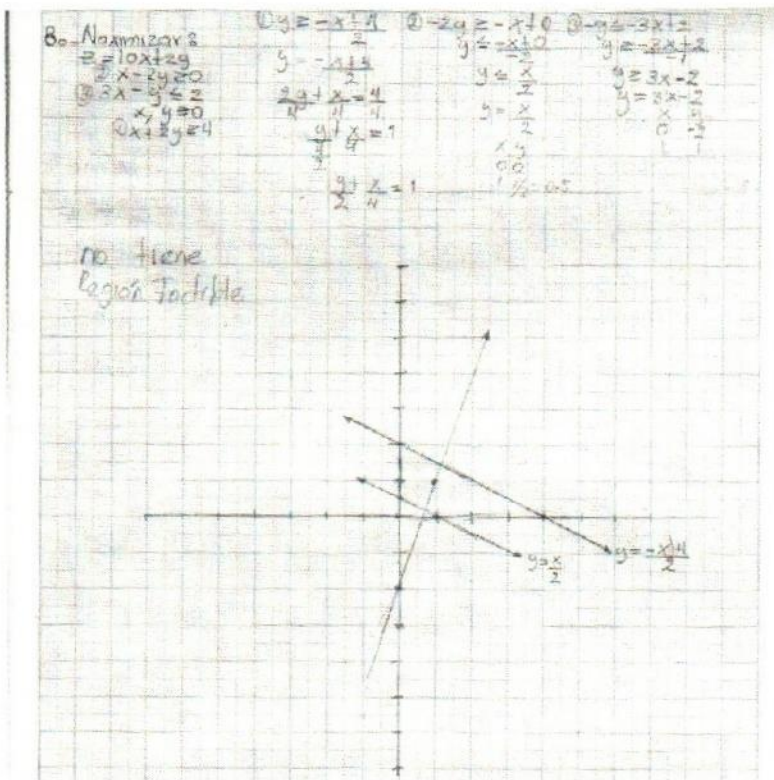
4.- Un empresario agropecuario necesita utilizar 120L de gasolina a $6.40 el litro, como resultado de mezclar otras 2 gasolinas de $7.10 el litro y de $6.00 el litro, ¿Cuantos litros de cada uno debe mezclar?

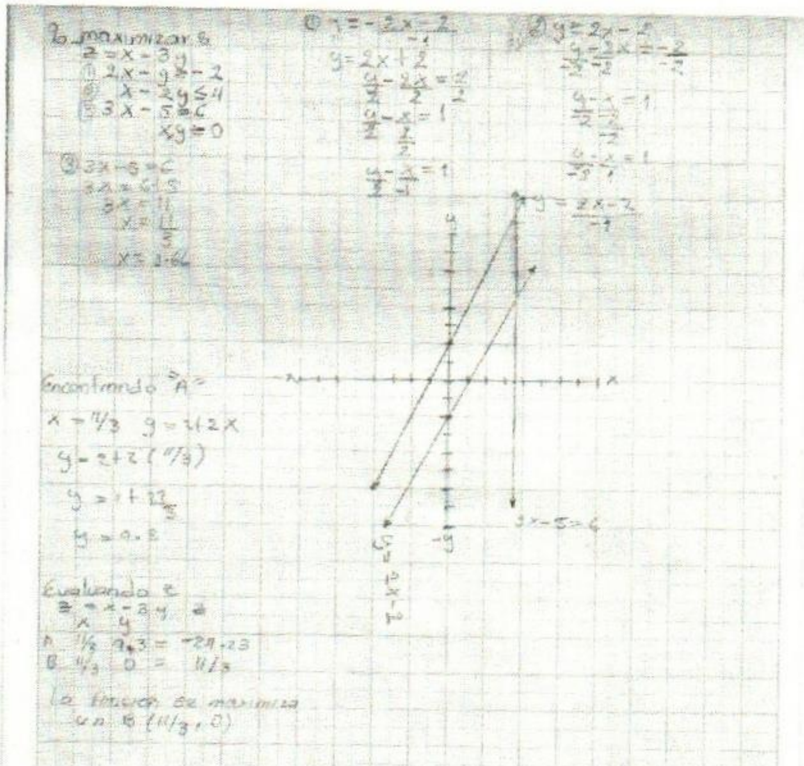
$7.10x + 6(120 - x) = 6.40(120)$
$7.10x + 720 - 6x = 768$
$7.10x - 6x = 768 - 720$
$1.1x = 48$

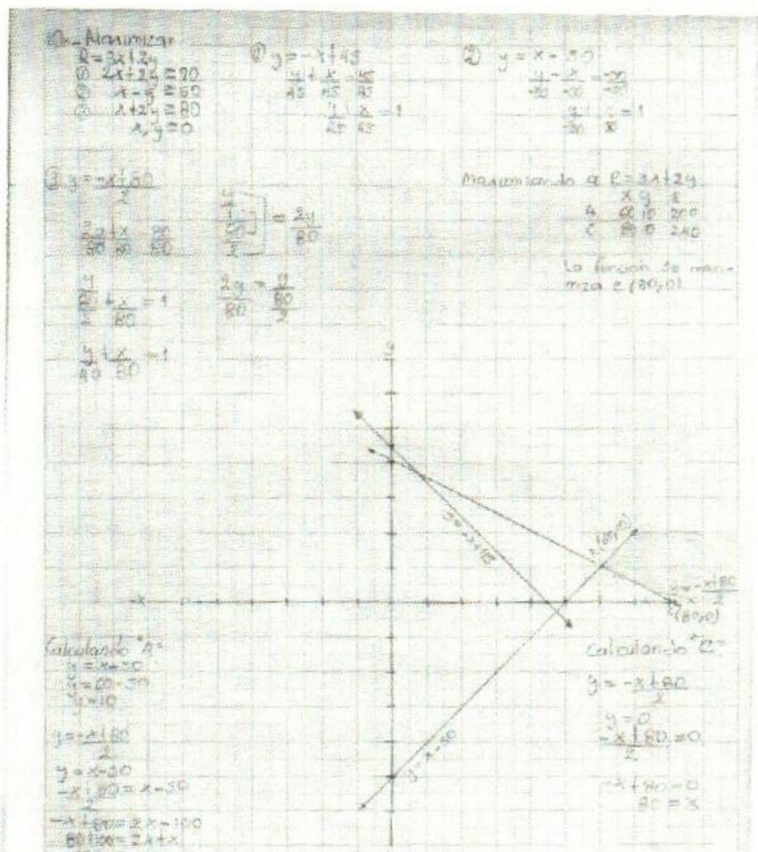
$x = \frac{48}{1.1}$

x = 43.63 Lts de $7.10


7.- Minimizar:
z = y - x
x ≥ 3
x + 3y ≥ 6
x - 3y ≥ -6
x, y ≥ 0


8.- Maximizar:
z = 10x + 2y
no tiene
Región factible


Maximizar
Encontrando "A"
Evaluando z
La función se maximiza en B (11/3, 0)


Maximizar
Maximizando a
La función se maximiza e (80,0)
Calculando "A"
Calculando "C"

Alimentos	variables	Proteína Cruda/Kg	Energía neta de lactancia (mcal)/Kg	Fibra Cruda/Kg	Precio/Kg $
concentrado	x	120gr	2mcal	100gr	100
forraje	y	200gr	1.3mcal	280gr	50
Necesidades nutritivas por ración		Mínimo 1500gr	Mínimo 16.5mcal	Mínimo 1300, Máximo 2000	

Determine la ración que haga el costo mínimo y que se cubran los requerimientos nutritivos en la elaboración de raciones para vacas lecheras en la cual intervienen los siguientes datos:

$x = 100$
$y = 50$

Función objetivo

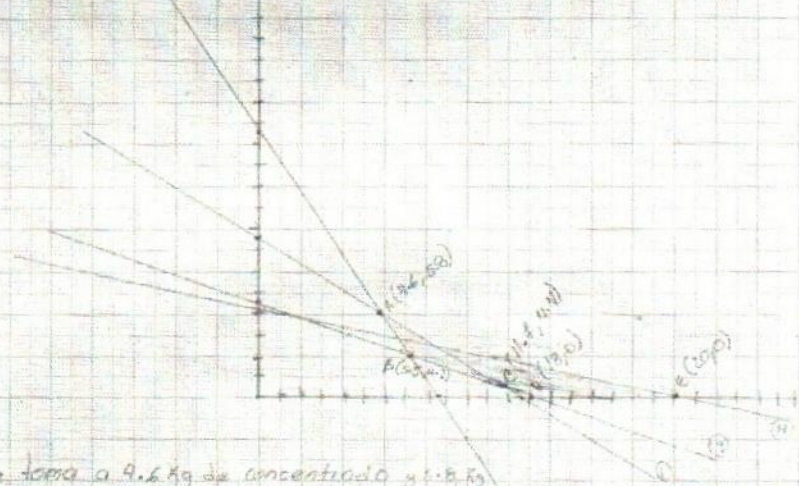
Costo $= 100x + 50y$

[illegible]

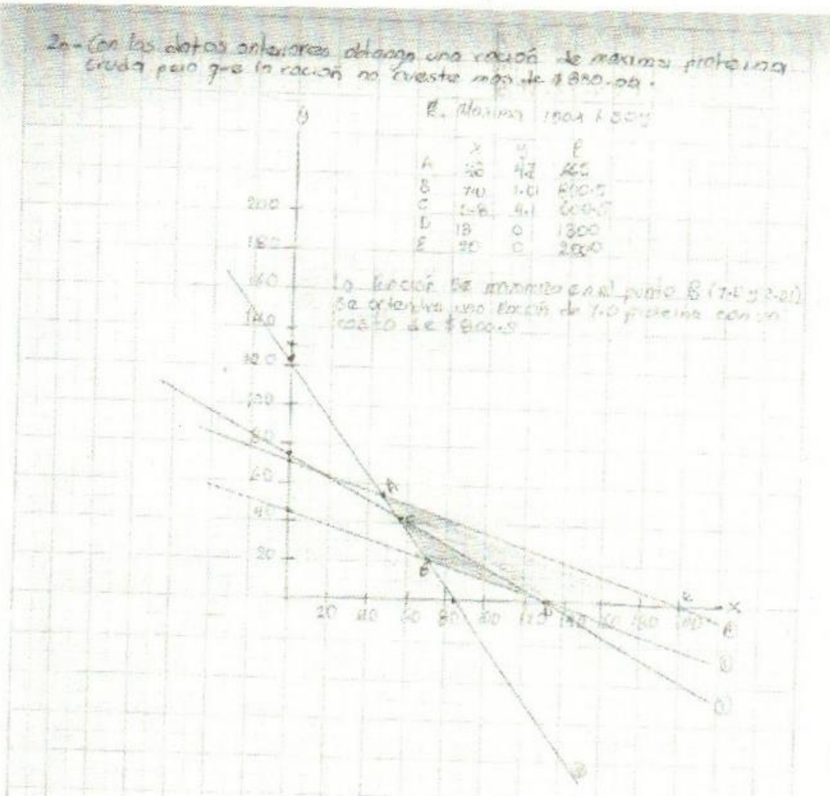
Minimizar

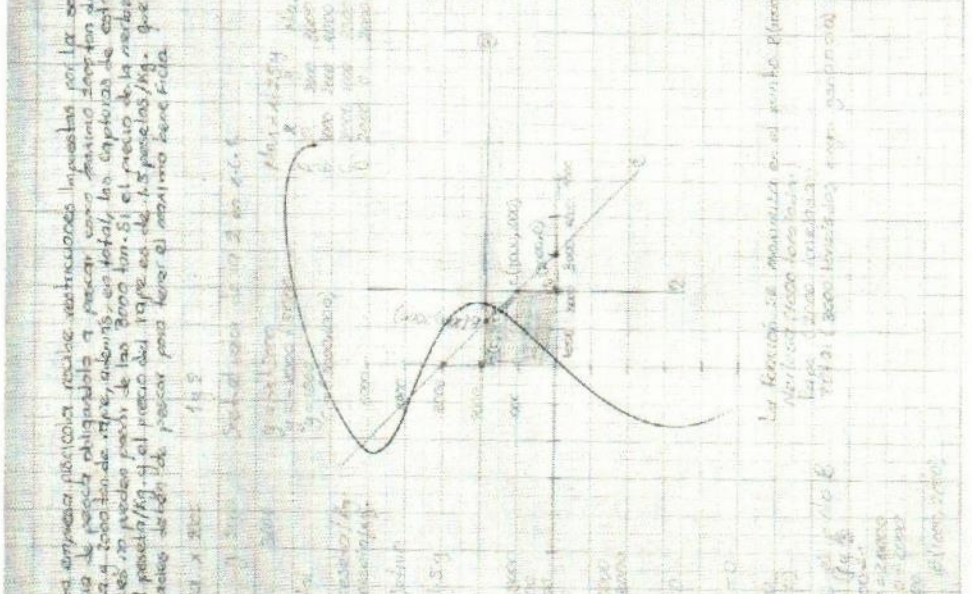
$100x + 50y$

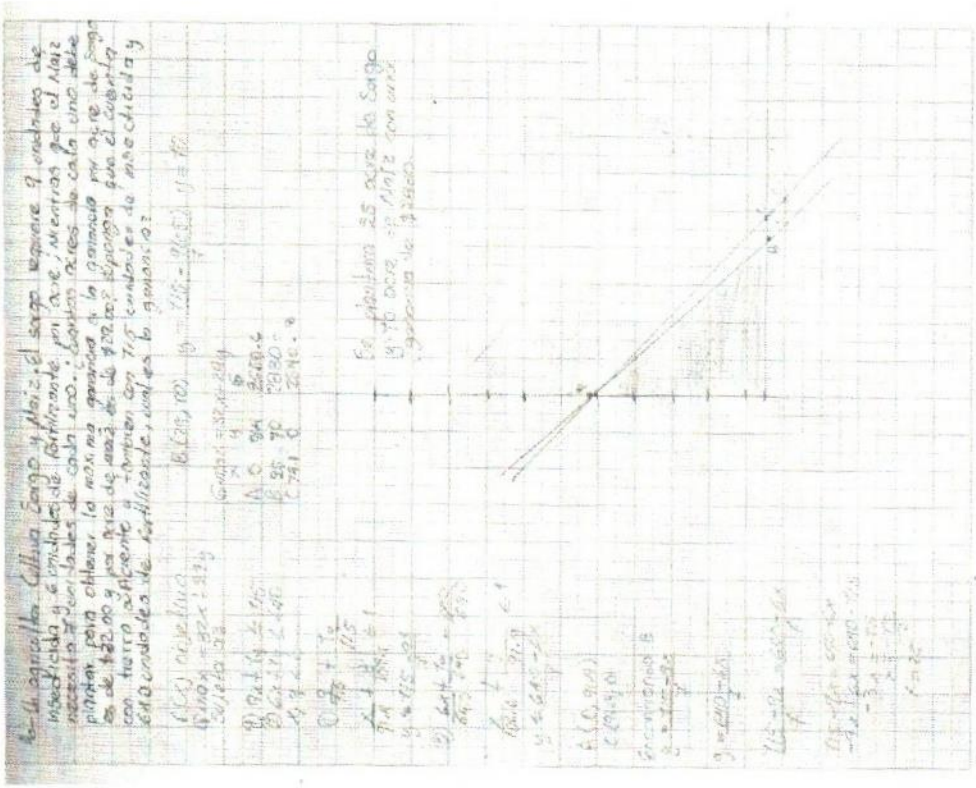
	x	y	Minimizar
A	4.6	6.5	760
B	5.5	4.2	760
C	11.1	[illegible]	11,92
D	13	0	1300
E	20	0	2000

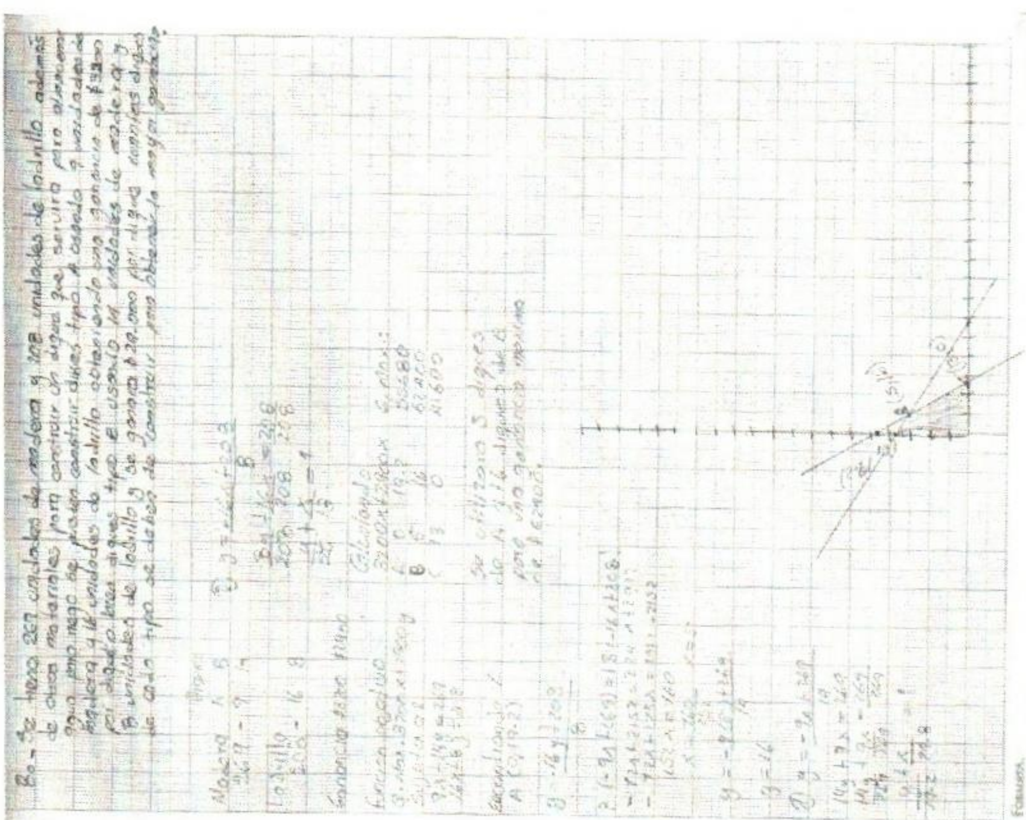


Se toma a 4.6 Kg de concentrado y 6.5 Kg de forraje y queda a un cost. mínimo de $760.


2.- Con los datos anteriores obtenga una ración de máxima proteína cruda pero que la ración no cueste más de $850.00.

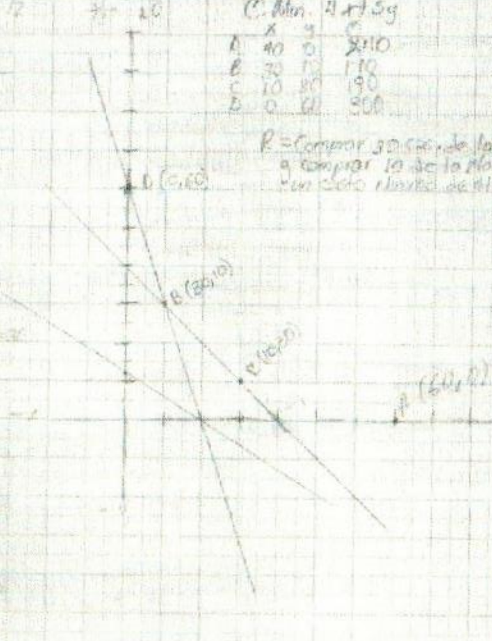






12.- Un agricultor va a comprar fertilizante que contiene 3 ingredientes nutritivos: A, B, C. Los requerimientos mínimos semanales son de 80 unidades de A, 120 de B y 240 de C. Existen dos marcas comerciales de fertilizantes en el mercado. La marca I cuesta $4.00 el costal, contiene 2 unidades de A, 6 unidades de B y 4 de C. La marca II cuesta $5.00 el costal y contiene 2 unidades de A, 2 unidades de B y 12 unidades de C. ¿Cuántos costales de cada marca debe comprar cada semana para minimizar los costos satisfacer los requisitos nutritivos?

A (60,0)
B (30,10)
C (10,30)
D (0,20)



C. Min. $4x + 5y$

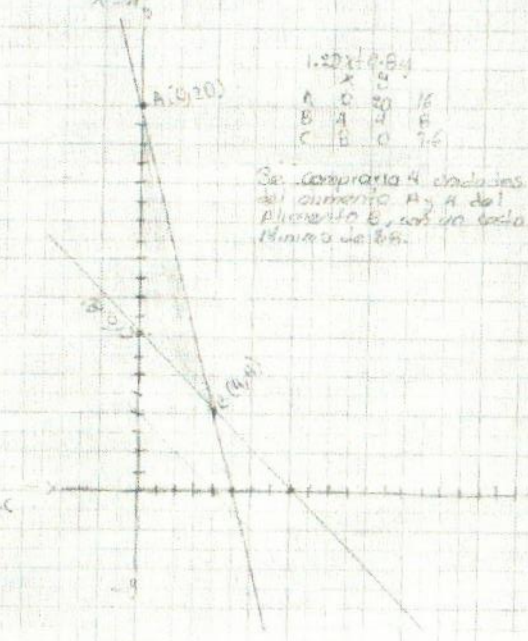
	x	y	C
A	40	0	210
B	30	10	170
C	10	30	190
D	0	60	300

R = Comprar 30 costales de la Marca I y comprar 10 de la Marca II con un costo mínimo de $170

11.- Una dieta para ganado lechero debe contener como mínimo 16 unidades de carbohidratos y 20 unidades de proteína. El alimento A contiene 2 unidades de carbohidratos y 4 de proteína; el B contiene 2 unidades de carbohidratos y 1 de proteína. Si el alimento A cuesta $1.20 por unidad y B $0.80 por unidad ¿Cuántas unidades de cada alimento debes de comprar para minimizar los costos? ¿Cuál es el costo mínimo?

	A	B
x	2	2
y	4	1

B (4,4)



$1.20x + 0.8y$

	x	y	
A	0	20	16
B	4	4	8
C	8	0	9.6

Se compraría 4 unidades del alimento A y 4 del alimento B, con un costo mínimo de $8.

1.- Sierto Agricultor necesita 8L de un insecticida al 7% de Concentracion tenia en un frasco 12L del mismo insecticida al 12% y en otro Frasco 20L al 6%. ¿Cuantos litros debe de tomar de los frascos para obtener lo que desea?

metodo

\# de litros

12% = x

6% = (8-x)

7% = 8

Concentrado

% 12 ÷ 100 = .12 (# de litros)

% 6 ÷ 100 = .06 (8-x) = .48 - .06x

% 7 ÷ 100 = .07 (8) = .56

.12x + .48 - .06x = .56

.06x = .56 - .48

.06x = .08

$x = \frac{.08}{.06}$

x = 1.33 Lts del 12%

8 - x = 8 - 1.33 = 6.67 Lts

6.67 Lts del 6%

2.- Se necesita llenar un tanque elevado para irrigación con dos bombas. Se sabe que una de ellas lo llena en 3 horas y la otra en 4 horas, en qué tiempo lo llenaron si trabajan juntos?

X = Tanque X = Tiempo en horas

$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 1$

$\frac{4x + 3x}{12} = 1$

4x + 3x = 12

7x = 12

$x = \frac{12}{7}$ hrs.

3.- Se desea cercar 2 terrenos adyacentes con 200m de mallas y que queden encerrados 1400m² de superficie; si son rectangulares que dimenciones deben tener.

A = 1400 m²

P = 200 m

A = bh

1400 = bh

2b + 3h = 200

$\frac{1400}{b} = h$

$2b + 3\left(\frac{1400}{b}\right) = 200$

$\left[2b + \left(\frac{4200}{b}\right) = 200\right](b)$

2b² + 4200 = 200b

b² - 100b + 2100 = 0

$b = \frac{100 \pm \sqrt{10000 - 8400}}{2}$

$b = \frac{100 \pm \sqrt{1600}}{2}$

$b = \frac{100 \pm 40}{2}$ b₁ = 70

b₂ = 30

$h = \frac{1400}{b}$

h₁ = 20

h₂ = 46.66

4.- Un empresario agropecuario necesita utilizar 120L de gasolina a $6.40 el litro, como resultado de mezclar otras 2 gasolinas de $7.10 el litro y de $6.00 el litro, ¿Cuantos litros de cada uno debe mezclar?

7.10x + 6(120-x) = 6.40 (120)

7.10x + 720 - 6x = 768

7.10x - 6x = 768 - 720

1.1x = 48

$x = \frac{48}{1.1}$

x = 43.63 Lts de $7.10

5.- Se sabe que un terreno rectangular tiene el doble de largo que de ancho. Si el largo se aumentara en 40m y el ancho en 6m entonces el área sería el doble. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

$2x$ $2x+40$

x $x+6$

$A=(x)(2x)=2x^2$

$(x+6)(2x+40)=2(2x^2)$

$2x^2+40x+12x+240=4x^2$

$2x^2+52x+240=4x^2$

$4x^2-2x^2-52x+240=0$

$2x^2-52x+240=0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$a \quad b \quad c$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\frac{52\pm\sqrt{(-52)^2-4(2)(240)}}{2(2)}$

$x=\frac{52\pm\sqrt{784}}{4}$

$x_1=\frac{52+28}{4}=\frac{80}{4}=20$

$x_2=\frac{52-28}{4}=\frac{24}{4}=6$

6.- Se sabe que 2 personas trabajan juntas sobre un cultivo, lo cosechan en 5 días. Uno de ellos solo lo hace en 8 días, en cuantos días lo hará la otra persona?

Persona	días	1 día
2 = juntas	5	1/5
1 = solo	8	1/8
1 = otra	x	1/x

5 8 | 2
5 4 | 2
5 2 | 2
5 1 | 5   40

$(40x)\ \frac{1}{8}+\frac{1}{x}=\frac{1}{5}$

$5x+40=8x$

$5x-8x=-40$

$-3x=-40$

$x=\frac{-40}{-3}$

$x=13.33$ día

7.- Se tiene 400m de maya para cercar 400m², ¿qué dimensiones debe de tener el terreno?

$A=400m^2$

$P=400m$

$\frac{400-2x}{2}$

$A(x)=(\frac{400-2x}{2})$

$400=(\frac{400-2x}{2})$

$800=400x-2x$

$2x-400x+800=0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$a \quad b \quad c$

$x=\frac{400\pm\sqrt{160000-4(2)(800)}}{2(2)}$

$x=\frac{400\pm\sqrt{153600}}{4}$

$x_1=\frac{400+391.91}{4}=\frac{791.91}{4}=197.97$

$x_2=\frac{400-391.91}{4}=\frac{8.09}{4}=2.02$

8.- Se desea mezclar Litros de alcohol al 38% con litros de alcohol al 33% para obtener 40L de alcohol al 34% ¿cuantos litros de cada uno debe mezclar?

Litros	Porciento
x	38 %
40 - x	33 %
40	34 %

$38x+1320-33x=1360$

$5x=40$

$x=\frac{40}{5}$ $x=$ 8 Litros al 38%

$40-8$

32 Litros al 33%

13.- Una tubería llena un tanque en 45 minutos y otra puede hacerlo en 30 minutos. Si funcionan al mismo tiempo y existe una tercera que, esta sacando el agua del tanque, transcurren 27 minutos para llenarlo. ¿Cuánto tiempo necesita la tercera tubería para vaciar el tanque cuando esta lleno?

Tubería	Tiempo	hrs
1 entrada	45 min	1/45
2 entrada	30 min	1/30
3 juntas	27 min	1/27
1 salida	X	1/X

45, 30, 27 | 2
45, 15, 27 | 3
15, 5, 9 | 3
5, 3, 3 | 3
5, 1, 1 | 5
1, 1, 1

$= 270$

$(270x)\frac{1}{45}+\frac{1}{30}+\frac{1}{27}=\frac{1}{x}$

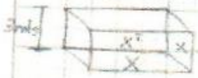
$6x+9x-10x=270$

$5x=270$

$x=\frac{270}{5}$

$x=54\text{ min}$

14.- Se necesita construir un recipiente abierto de fondo cuadrado, lados rectangulares y altura de 3m, si el material para el fondo cuesta 5.4 por m² y el de los lados 2.40 por m² cual sera el volumen que puede obtenerse con \$63.00 de material.



\$ 5.40 (3m)

\$ 2.40 x \$ 63.00

$(x^2)(5.40)+(3x)(4)(2.40)=63$

$5.40x^2+28.8x-63=0$

$X=\frac{-28.8\pm\sqrt{(28.8)^2-4(5.40)(-63)}}{2(5.40)}$

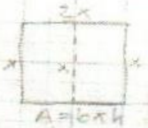
$X_1=\frac{-28.8+146.8}{10.8}=\frac{75.56}{10.8}=6.99$

$X_2=\frac{-28.8-146.8}{10.8}=\frac{-75.6}{10.8}=-7$

$V=(6.99)(6.99)$

$V=48.8601$

22.- Un Campesino desea Cercar Un terreno usando 180m de alambrado y la parte que da al rio sin cercar que es una de las partes mas largas del terreno se necesita la longitud del lado paralelo al rio sea el doble de la longitud del ancho del terreno.



$A=b\times h$

$180=x+2x+x$

$180=4x$

$X=\frac{180}{4}$

$b\times h=90m\times45m$

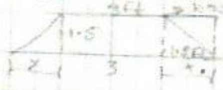
$A=4050m$

$2(45)=90L, 45$ ancho

$A=b\times h=90\times45$

$A=4050m$

23.- La sección transversal de un Canal de desague es un trapecio Isosceles, cuya base menor es de 3 pies y una altura de 1.5 pies; determine el ancho de la base mayor para que el área transversal del canal sea de 6.5 pies².



$A=\frac{b+b \cdot a}{2}$

Datos

$A=6.5ft^2$

$6.5ft^2=\frac{3ft+b \cdot 1.5ft}{2}$

$6.5ft^2\cdot2=3ft+b\cdot1.5ft$

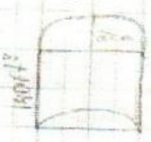
$\frac{6.5ft^2\cdot2}{1.5ft}=b$

$8.7ft=b$

$b=8.7ft$

Base Mayor es igual a 8.66.

24.- Se desea construir un silo para granos en forma de Cilindro circular recto con una semiesfera unida a la parte superior. El diametro del silo debe ser de 30 pies, Encontrar la altura para que su capacidad sea de 11,260 πft^2.



$11{,}260\pi ft^3=\pi r^2(h)+\frac{2}{3}\pi r^3$

35343ft³ = 706.86h + 7068.6

35343ft³ − 7068.6 = 706.86h

$h=\frac{28274.4}{706.86}=h=40ft^3$

$\frac{4\pi r^3}{3}$

formula del volumen de la esfera.

25.- Un tanque con agua para irrigación puede vaciarse con una bomba 5 horas pero otra mas pequeña puede vaciarlo en 8 horas. Si se pone a funcionar la bomba grande 4h de la tarde a que horas debe encenderse la pequeña para que el tanque quede vacío a las 8 de la tarde.

Bomba	Tiempo	1 hr	
1	5 hr	1/5	
2	8 hr	1/8	

(4/3) 1/8 x = 1/5 [illegible]

x = 8/ [illegible]

R = 2:24 [illegible] para prenderle la 2a bomba

26.- Hay que cercar un huerto cuadrado con un alambrado, si la cerca cuesta 30 pesos x metro, y el costo de reparar el terreno es de 25 pesos por m² determine el tamaño de la huerta que puede cercar con un costo de $ 6,000.

6,000 = 30 (4x) + 25 (x²)

[illegible]

27.- Un ganadero esta preparando una mezcla de avena y maíz para ganado. Cada onza de avena proporciona 4g de proteína y 18 gramos de carbohidratos y una onza de maíz da 3g de proteínas y 24g de carbohidratos. Cuantas onzas de avena y onza de maíz se requieren a fin de satisfacer las metas nutricionales de 200g de proteína y 1320g de carbohidratos por mezcla.

28.- Un gallinero tiene longitud de 3m menor que 4 veces su anchura y su perímetro es de 19m cuales son sus dimensiones.

4x-3

19 mts | x

4x-3

$4x-3+4x-3+x+x=19$

$8x-6+2x=19$

$10x-6=19$

$10x=19+6$

$10x=25$

$x=\frac{25}{10}$

$x=2.5$

$4(2.5)-3$

$10-3$

7 Largo

29.- Un agricultor invierte parte de 15 mil peso al 12% y el resto al 8%. Su ingreso anual proveniente de las 2 inversiones es 2,000 pesos. ¿Cuanto abra invertido a cada interes?

x = 36 al 8%

15000 − x

15000 − 8600 = 6400 al 12%

Invierte

$ 15000 − x

x + 8% .8x

12% (.12) (15000 − x) = 1800 − .12x

1800 − .12x + .08x = 1456

− .12x + .08x = 1456 − 1800

x = −344 / −0.04

x = 8,600

30.- Determine cuanto agua se requiere para diluir 15L de una solución que tiene 12% de un fungicida para obtener una solución al 5%.

Lts	Fungicida	
15	12%	1.8
x	12%	0.75
15	5%	.05 x

(0.12) (15) = 1.8

(0.12) (x) = 0.12x

(0.05) (15) = 0.75

1.8 − 0.12x = 0.75

− 0.12x = 0.75 − 1.8

− 0.12x = − 1.05

x = 8.75 de Agua

33.- El tubo de salida descarga un deposito de irrigación en 2 horas menos que el tiempo que lleva otro tubo llenarlo, un día al comienzo de la irrigación, cuando el deposito estaba lleno el campesino abrio los tubos y el deposito se vacio a las 24 horas, en cuantas horas puede el tubo llenar, si el tubo de salida se cierra.

llaves	tiempo	1 hr
- entrada	x	$1/x$
- salida	$x-2$	$1/x-2$
- juntas	24	$1/24$

$1/x - 1/x-2 = 1/24$

$24x - 24(x-2) = x(x-2)$

$24x - 24x + 48 = x^2 - 2x$

$0 = x^2 - 2x - 48$

$x^2 - 2x - 48 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2(a)}$ $\quad x = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2}$ $\quad x_1 = \frac{2+14}{2} = 8$ en llenarse.

$x_2 = \frac{2-14}{2} = -6$

34.- Un jardín de flores, circular; tiene a su alrededor un camino de 2 pies de ancho, si las áreas combinadas del camino y el jardin son 1.5 veces el área del jardin. Encuentre el area del jardín?

$AJ = \pi r^2$

$AC = \pi(r+2)^2$

$(1.5)AJ = \pi(r+2)^2$

$1.5\,\pi r^2 = \pi(r+2)^2$

$\frac{3}{2} r^2 = r^2 + 4r + 4$

$\frac{1}{2} r^2 - 4r - 4 = 0$

$r^2 - 8r - 8 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4a(c)}}{2(a)}$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{96}}{4}$

$x_1 = \frac{8+9.79}{4} = 4.4475$ area del jardin

$x_2 = \frac{8-9.79}{4} = -0.43$

b- maximizar

$P = 5x + 6y$

sujeta a:

① $x + y \leq 80$

② $3x + 2y = 220$

③ $2x + 3y = 210$

$x, y \geq 0$

① $y \leq -x + 80$

$y = -x + 80$

$\frac{y}{80} + \frac{x}{80} = \frac{80}{80}$

$\frac{y}{80} + \frac{x}{80} = 1$

② $y = \frac{-3x + 220}{2}$

$\frac{2y}{220} + \frac{3x}{220} = \frac{220}{220}$

$\frac{y}{\frac{220}{2}} + \frac{x}{\frac{220}{3}} = 1$

$\frac{y}{110} + \frac{x}{73.3} = 1$

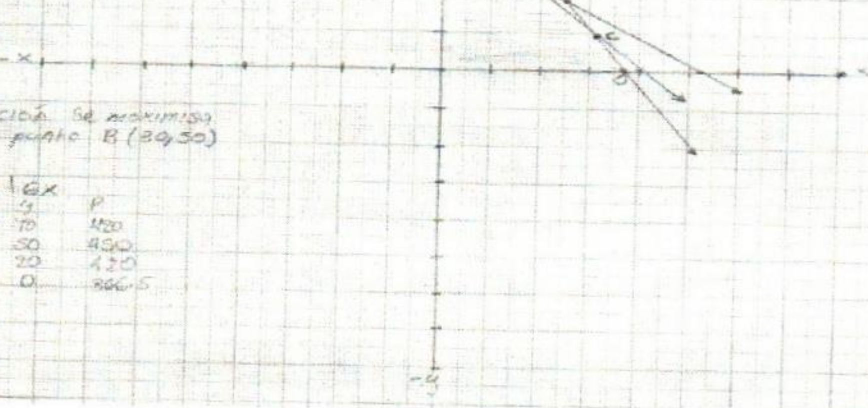
③ $y = \frac{-2x + 210}{3}$

$\frac{3y}{210} + \frac{2x}{210} = \frac{210}{210}$

$\frac{y}{\frac{210}{3}} + \frac{x}{\frac{210}{2}} = 1$

$\frac{y}{70} + \frac{x}{105} = 1$

A (0, 70)
B (30, 50)
C (60, 20)
D (73.3, 0)



La función se maximiza para el punto B (30, 50)

$P = 5x + 6x$

	x	y	P
A	0	70	420
B	30	50	450
C	60	20	420
D	73.3	0	366.5

2.- maximizar:

$z = 4x - 6y$

Sujeta a:

① $y \leq 7$

② $3x - y \leq 3$

③ $x + y \geq 5$

$x, y \geq 0$

① $y \leq 7$

② $3x - y \leq 3$

$-y \leq -3x + 3$

$y \geq 3x - 3$

③ $x + y \geq 5$

$y = -x + 5$

② $y = 3x - 3$

x	y
0	-3
1	0

③ $y = -x + 5$

x	y
0	5
1	4

Encontrando A = 2 y 3

$y = 3x - 3 = y = -x + 5$

$3x - 3 = -x + 5$

$4x = 8$

$x = \frac{8}{4}$

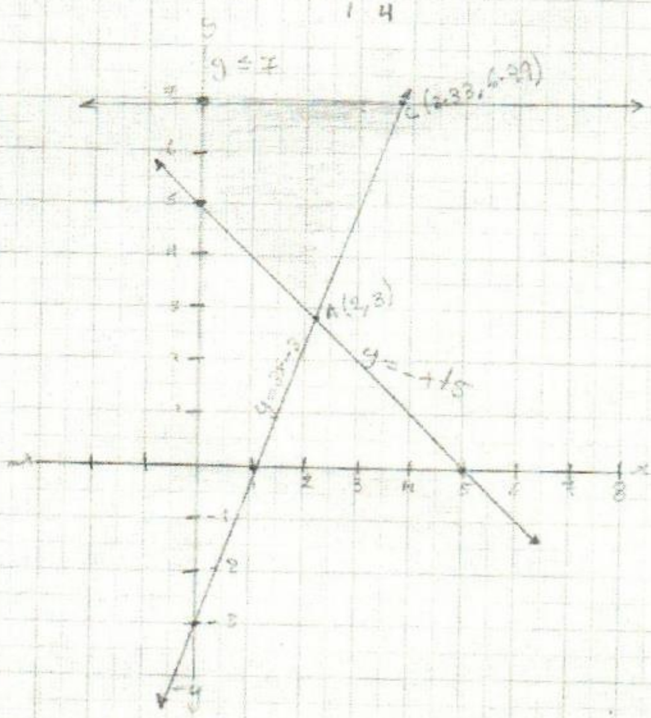
$x = 2$

A(2, 3)

$-x + 5$

$-2 + 5$

$y = 3$

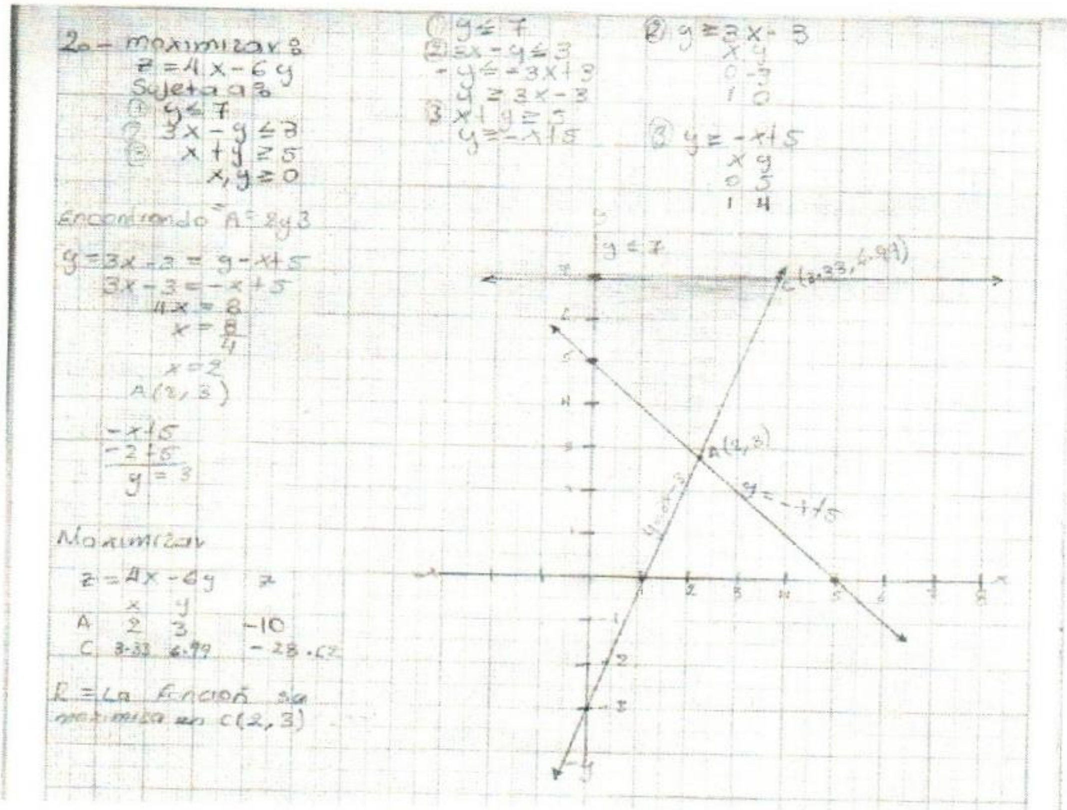


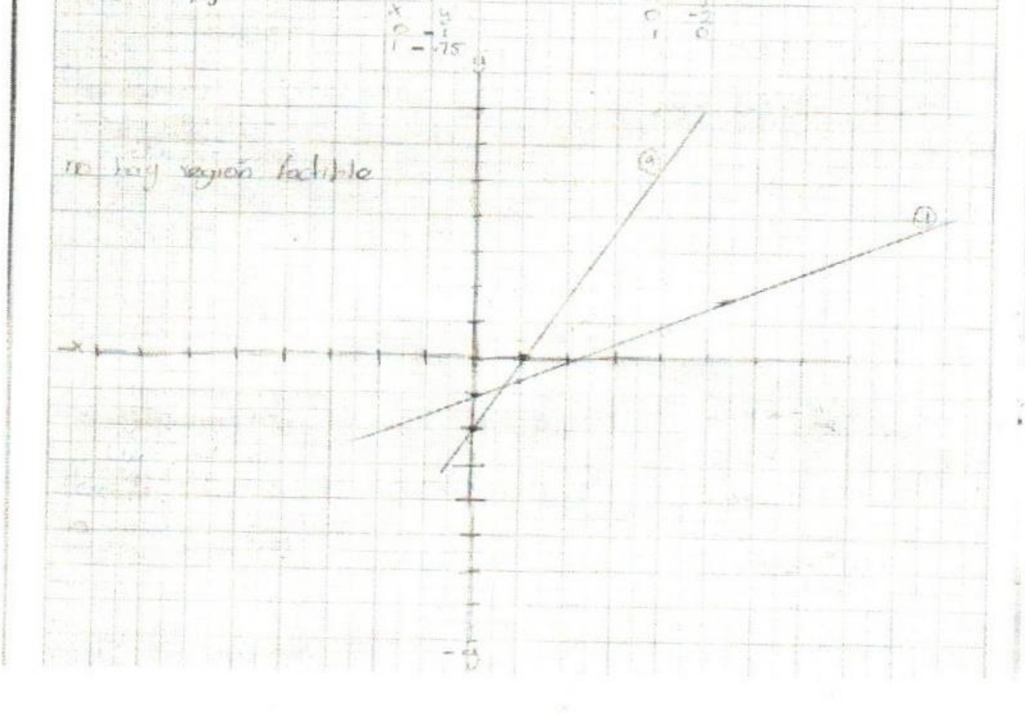
Maximizar

$z = 4x - 6y$

	x	y	z
A	2	3	-10
C	3.33	6.99	-28.62

R = La función se maximiza en C(2, 3)


2.- maximizar:
z = 4x - 6y
Sujeta a:
① y ≤ 7
② 3x - y ≤ 3
③ x + y ≥ 5
x, y ≥ 0
Encontrando A = 2 y 3
y = 3x - 3 = y - x + 5
3x - 3 = -x + 5
4x = 8
x = 8/4
x = 2
A(2, 3)
-x + 5
-2 + 5
y = 3
Maximizar
z = 4x - 6y
x y z
A 2 3 -10
C 3.33 6.99 -28.62
R = La función se maximiza en C(2, 3)
① y ≤ 7
② 3x - y ≤ 3
-y ≤ -3x + 3
y ≥ 3x - 3
③ x + y ≥ 5
y ≥ -x + 5
② y ≥ 3x - 3
x y
0 -3
1 0
③ y ≥ -x + 5
x y
0 5
1 4
y ≤ 7
C(3.33, 6.99)
A(2, 3)
y = -x + 5
y = 3x - 3


maximizar:
3.- z = 4x - 10y
Sujeta a:
① x - 4y ≤ 4
② 2x - y ≤ 2
x, y ≥ 0
① x - 4y = 4
-4y ≥ -x + 4
y = -x + 4 / -4
y = x + 4 / -4
x y
0 -1
1 -.75
② 2x - y ≤ 2
-y ≤ -2x + 2
y ≥ 2x - 2
y ≥ 2x - 2
x y
0 -2
1 0
no hay región factible
②
①

NOTAS DE CLASE DEL ALUMNO LUIS RODRIGO CIGARROA GRAJALES, QUIEN RECIBIÓ CLASES CON EL ING. OSCAR NOE MORALES OROZCO.

"Estudio ganas"
Bacer 10°

"MATEMATICAS I" 28/01/2001

Unidad I. Álgebra
1.1 Ecuaciones lineales.
1.2 Ecuaciones simultaneas.
1.3 Ecuaciones cuadraticas

"Conclusión"
* Arit.
* Algebra
* Geo y trigo
* Prob. y Est.

Unidad 2: Programación lineal.
2.1 Inecuaciones
2.2 Metodo grafico y simplex

"Investigación"
* Unidad 2, 4.

Unidad 3. Trigonometria y Geometria.
3.1 Funciones trigonometricas
3.2 Triangulos y poligonos regulares e irregulares.

Unidad 4. Logaritmos.
4.1 Ecuaciones logaritmicas
4.2 Transformación y graficación de variables.

Bibliografias:

- Algebra. Baldor
- Matematicas I. (Coleccion DGETI-SEP) Garza O
- Algebra. Rees, P.K. y F.W. Sparks. Reverte Ediciones.
- Trigonometria plana y Esferica. Ayres. F. J. Mc. Graw Hill.
- Matematicas II. Aranda garcia P. IPN.

"Aritmetica" 25/01/2007

- Naturales $(0-9) \Rightarrow$ Operaciones
- Enteros (positivos, negativos) $\{-5, 5\}$
- Racionales $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
- Irracionales $(\pi, \sqrt{3})$

$2 \overline{)186}$ = 93 ; $3 \overline{)93}$ = 31

(3) $\frac{(18-9)-(10-10)+3}{(3+2)-(4-6)^2} = \frac{9+3}{5-4} = \frac{12}{1}$

$5 \overline{)175}$ = 35 ; $5 \overline{)90}$ = 18

(4) $\frac{\sqrt{9}+\sqrt{4}-\sqrt{81}}{(2)^2+(3)^2+(1)^3} = \frac{3+2-9}{4+9+1} = \frac{-4}{14}$

(5) $\left[\frac{\sqrt{25}+(3)^2-(2)^3}{(1)^2+\sqrt{16}+2}\right]+1 = \left[\frac{5+9-8}{1+4+2}\right]+1 =$

$\frac{6}{7} + 1\frac{\cancel{6}}{7} = \frac{13}{7} = 1\,\frac{6}{7}$

(6) $\left[\frac{(-4)(-6)\div 4}{(1)(3)(\sqrt{4})(-1)^3}\right]-1 = \frac{6}{-6} - 1 = -2$

(7) $\frac{\sqrt{100}}{-5} + (-3)^3 - [1-(-2)^4+5]+19 = \frac{10}{-5} + (-27) - 22 + 19$

$-2 - 22 - 27 + 19 = (32)$

Num Racional (Q)

(8) En la recta numerica.

Representa los siguientes numeros racionales en la recta.

a) $-\frac{1}{4}$, b) 7.10 c) $\frac{4}{5}$, d) $\frac{20}{4}$, e) $\frac{6}{5}$ f) $-\frac{5}{2}$, g) $\frac{10}{3}$ h) $\frac{3}{4}$ i) 0.5, j) 0.8.

a) 

$\overline{3}.333$ → Periodico

$\frac{1}{4}$ — numerador, — denominador

$4\overline{)10}$ — cociente, — dividendo, divisor, residuo

Multiplicacion $= (\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$

División $= (\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) = \frac{3}{3}$

Suma
Resta > m-c-m.

Tarea

1. $\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{6}\right) = \frac{12}{80} = \frac{6}{10}\ \frac{3}{5}$
2. $\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \frac{8}{2} = \frac{18}{2} = 9$
3. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{10-12-45+40}{30} = \frac{40+10-57}{30} = \frac{-7}{30}$
4. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$
5. $\left(\frac{3}{7}\right) \div \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{3}{42} = \frac{1}{14}$
6. $\left(-\frac{8}{7}\right)^2 = \frac{64}{7}$
7. $\sqrt[3]{\frac{-27}{8}} = \frac{3}{2}$
8. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$
9. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} + \left[2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right]} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} = \dfrac{\frac{3+2}{6}}{\frac{1}{5} + \left[2 + \left(\frac{1}{3}\right)\right]} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{6+15+10}{30}}\ \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{31}{30}} = \frac{186}{100} = \frac{93}{75} = \frac{31}{25}$

$1\ \frac{6}{25}$

10. $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \div \frac{5}{6}\right] - 1}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}}$

$= \frac{10}{20} \times \frac{5}{6} \times \frac{60}{100} - \frac{100}{100}\ \dfrac{-40}{100}\ \dfrac{\frac{-40}{100}}{\frac{7}{6}}$ $\dfrac{}{\frac{-2+3+6}{6}}$ $=$ ~~$\frac{700}{}\ \frac{350}{120}\ \frac{175}{90}\ \frac{35}{18}$~~

$1\ \frac{7}{18}$

$\frac{700}{-240} = \frac{350}{-120} = \frac{175}{-60} =$

$-2\ \frac{55}{60} = \frac{11}{12}\ = -2\ \frac{-11}{12}$

9.- $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} + \left[2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right]} =$

10.- $\dfrac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \div \frac{5}{6}\right] - 1}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}}$

Matematicas I
9/02/2009 Razones y proporciones — Luis Rodrigo Guerrero G.
Miercoles.

Razon: Comparación por cociente entre dos numeros.

Ejemplo: $10/3 \Rightarrow$ Razon proporción: Es la igualdad de dos razones. Ejemplos $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$ " 4 es a 6, como 10 es a 15 " o $4:6 :: 10:15$ { 4, 6, 10, 15 = terminos de la proporcion, 4 y 15 extremos y 6 y 10 = medios.

$\frac{4}{6} = \frac{10}{15} \rightarrow (4)(15) = (6)(10) \qquad 60 = 60$

Ejercicios

① $\frac{3}{4} = \frac{x}{20}$ (2) $\frac{m}{5} = \frac{9}{12}$

$(4)(x) = (3)(20)$

$4x = 60$

$x = \frac{60}{4}$

③ Determine en cada caso, si el par de razones dadas forman o no una proporcion

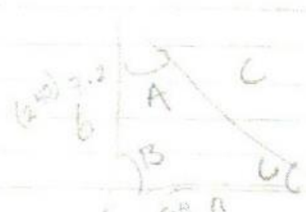
a) $25/5 = 40/8 = \frac{200}{200}$ proporcional   ~~b) $7/35 = 5/25 = \frac{175}{175}$ proporcional~~   c) $9/18 = 3/6 = \frac{54}{54}$ proporcional   d) $2/7 = 6/21 = \frac{42}{42}$ proporcional

④ Calcular el valor del termino que falta en la siguiente proporciones

a) $28/32 = 420/x$ b) $x/27 = 72/486$ c) $14/42 = x/6$ d) $12/x = 18/6$

$\frac{(32)(420)}{28} = \frac{13440}{28} = 480$ $\frac{(27)(72)}{486} = \frac{1944}{486} = 4$ $\frac{(14)(6)}{42} = \frac{70}{42} = \frac{35}{21} = \frac{5}{3}$ $\frac{(12)(6)}{18} = \frac{72}{18} = \frac{36}{9} = 4$

$\frac{a}{\text{Sen}A} = \frac{b}{\text{Sen}B} = \frac{c}{\text{Sen}C}$



① Medio

② Un número ... el doble del otro ... $x + 2y$

③ La diferencia de dos números ... $x - y$

④ El cuadrado de un número ... [illegible]

⑤ La suma de dos números ... $a + b$

⑥ La suma de los cuadrados de dos números ... $x^2 + y^2$

⑦ La mitad de dos números ... entre dos ... $\frac{m-n}{2}$

⑧ El ... de un número al cubo ... x^3

⑨ Un número ... n

⑩ El triple de la diferencia de dos números ... $3(x-y)$

Elementos de una expresión algebraica — [illegible] — Clasificación algebraica: - Monomio - Binomio - Trinomio - Polinomio

Término semejante

① [illegible]

② [illegible]

③ [illegible]

④ [illegible]

⑤ [illegible]

⑥ Determinar el valor numérico de la expresión ...

[illegible]

"Matemáticas" — 11/0_/20__ Miércoles

$a = 2,\ b = 1,\ c = 1$

$a = 1,\ b = 1,\ c = 0$

⑦ $8 + x + [-3 - 2(x + 5)]$

⑧ $4x^2 - \{3x^2 - 2[y - 4(x^2 - y)]\} + 7 =$

⑨ [illegible]

⑩ [illegible]

① $8 + x + [-3 - 2x - 10]$

$8 + x - 3 - 2x - 10$

[illegible]

$\boxed{-5 = x}$

⑥ $4x^2 - \{3x^2 - 2[y - 4x^2 - 4y]\} + 7 =$

[illegible]

$+11x^2 + 9y + 7$

⑦ [illegible]

[illegible]

(6) $2g - 3\{h - 5[i + 3g - 6h + 9i - g] + 4h\} + 3i =$

(6) $2g - 3\{h - 5[i + 3(g - 2h + 3i) - g] + 4h\} + 3i$

$2g - 3\{h - 5[i + 3g - 6h + 9i - g] + 4h\} + 3i$

$2g - 3\{h - 5i - 15g + 30h - 45i + 5g + 4h\} + 3i$

$2g - 3h + 15i + 45g - 90h + 135i \ldots + 3i =$

$32g - 105h + 153i =$

$32(2) - 105(1) + 153(-1) =$

$64 - 105 - 153 =$

$R = -194$

11/02/2007

Comportamiento de la exponente — Leyes Fracciones

=> Suma y Resta.- Solo se juntan (mismo literal, mismo exponente)

$2a + b - d \quad (-6a + 2b + 2d) \qquad 2a + b - d$

$\qquad -8a + b + 3d$

$\qquad -6a + b + 2d$

=> multiplicacion.- los exponentes se suman

(1) $(-6x^2)(6x^3) = -12x^5$

(2) $(\frac{1}{2}a^2bx)(\frac{3}{5}b^2x^5)(-x) = \frac{3}{10}a^2b^3x^7$

(3) $(-\frac{1}{2}a^{x+1})(-2a^{x+2})(2) = \ldots$

=> Division: los exponentes se restan (...) ÷ (...)

(2) $(-\frac{2}{7}x^3y^2) \div (\frac{3}{5}x^2y^2) = -\frac{10}{21}x$

(3) $(a^{m+3}) \div (a^{m+2}) = a$

(4) $a \neq 0 \quad -2$

=> Potencia.- los exponentes se multiplican

(1) $(2x^2)^3 = 8x^6$

(2) $(\frac{1}{2}a^2b^3c^4) = \frac{1}{8}a^6b^9c^{12}$

Sumas y restas de monomios y polinomios

① [illegible] $= 10$
② [illegible] $= 2a - a - 5b - 3b + 3c$ [illegible]
③ [illegible] $= a - 6b + 4$ $9b - 4d$
④ [illegible] $= 2a^2x - \frac{1}{2}b^2y + \frac{3}{7}xy$
⑤ [illegible] $= -27$

=> multiplicación de monomios y polinomios

① [illegible] $= k^2w^2x^4y^2z^2$
② [illegible] $(1) = 3m^2n^2$
③ [illegible]
④ [illegible]
$R = -5m^7 - 4m^6 + 24m^5 - 20m^4$ [illegible] $- 34m^2 + 34m + 3$

=> División de monomios y polinomios

① [illegible] $= 5m^2$
② [illegible] $= \frac{7}{10}a^2b^2$
③ [illegible] $= -2a^{x-2}$

4 [illegible] $- 4xyz$

⑤ [illegible]

$\frac{22a^{-3x-3}}{12} - 4a^{-2x-2} + a^{-x-1} - \frac{1}{12}$

PRODUCTOS NOTABLES

SE ANALIZAN 4 COSAS:
- CUADRADO DE UN BINOMIO.
- CUBO DE UN BINOMIO.
- BINOMIOS CONJUGADOS.
- BINOMIO DE UN TERMINO COMÚN.

=> CUADRADO DE UN BINOMIO
EL CUADRADO DEL 1er TERMINO
± EL DOBLE DEL 1 X EL 2 TERMINO
$(a+b)^2 = (a)^2 + 2(a)(b) + (b)^2$
$(x-y)^2 = (x)^2 - 2(x)(y) + (y)^2$

=> BINOMIOS CONJUGADOS
EL CUADRADO DEL TERMINO IDENTICO.

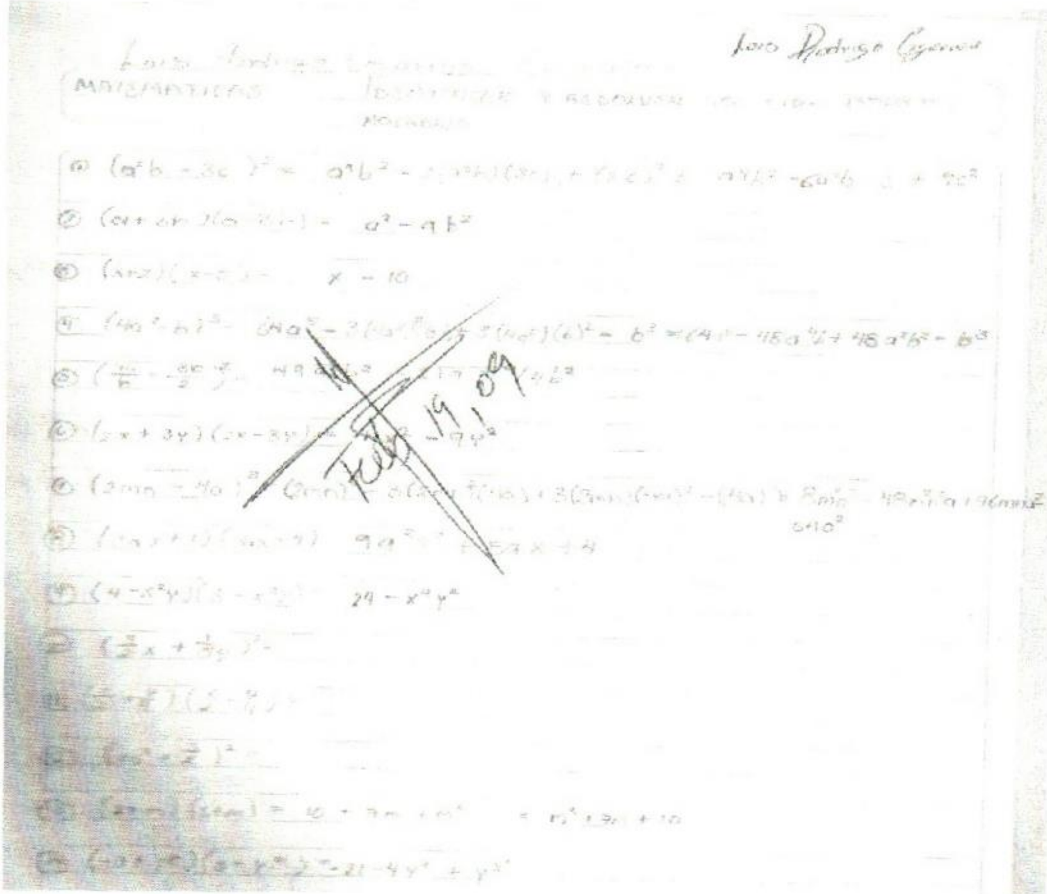
=> CUBO DE UN BINOMIO
[illegible]

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

=> BINOMIOS CON UN TERMINO COMÚN =
EL CUADRADO DEL TERMINO COMÚN
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

± algebraica de los terminos no comunes
x el termino común
+ el productos de los terminos no comunes.

$(x+2)(x+3) = x^2 + 5x + 6$



Luis Rodrigo Cisneros

2. $(a+3b)(a-3b) = a^2 - 9b^2$

3. $(x+2)(x-5) = x - 10$

4. $(4a^2-b)^3 = 64a^6 - 3(4a^2)^2(b) + 3(4a^2)(b)^2 - b^3 = 64a^6 - 48a^4b + 12a^2b^2 - b^3$

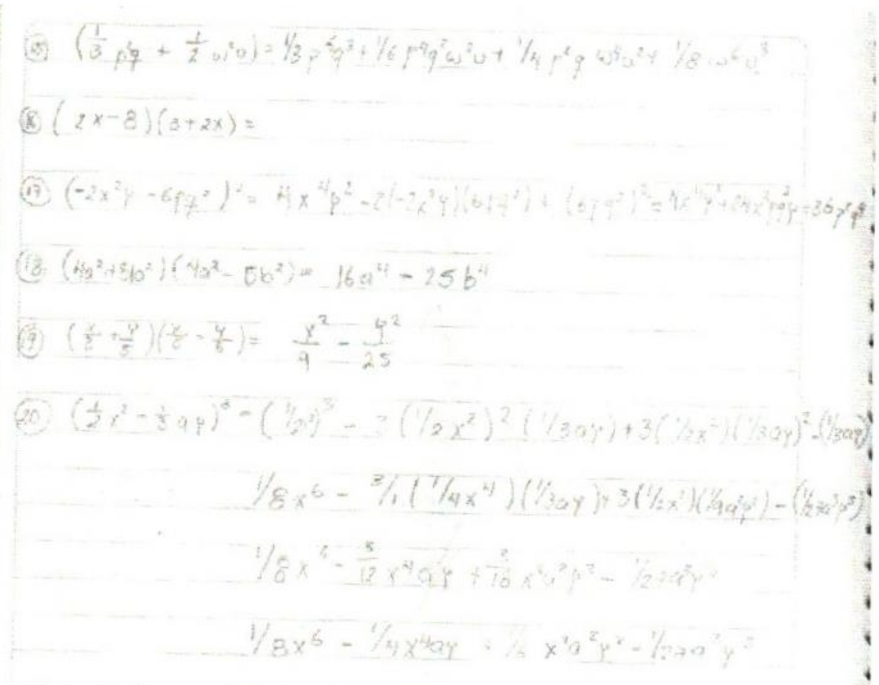
6. $(2x+3y)(2x-3y) = 4x^2 - 9y^2$

Feb 19, 09

10. $24 - x^4y^2$

13. $= m^2 + 3m + 10$

14. $= 21 - 4y^2 + y^{x}$



15. $(\frac{1}{3}pq + \frac{1}{2}w^2u) = 1/3\,p^2q^2 + 1/6\,p^2q^2w^2u + 1/4\,p^2q\,w^4u^2 + 1/8\,w^6u^3$

16. $(2x-8)(3+2x) =$

17. $(-2x^2y - 6pq^2)^2 = 4x^4p^2 - 2(-2x^2y)(6pq^2) + (6pq^2)^2$

18. $(4a^2+5b^2)(4a^2-5b^2) = 16a^4 - 25b^4$

19. $(\frac{x}{2}+\frac{y}{5})(\frac{x}{2}-\frac{y}{5}) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}$

20. $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}ay)^3 = (1/2x^2)^3 - 3(1/2x^2)^2(1/3ay) + 3(1/2x^2)(1/3ay)^2 - (1/3ay)^3$

$1/8x^6 - 3/1(1/4x^4)(1/3ay) + 3(1/2x^2)(1/9a^2y^2) - (1/27a^3y^3)$

$1/8x^6 - \frac{3}{12}x^4ay + \frac{3}{18}x^2a^2y^2 - 1/27a^3y^3$

$1/8x^6 - 1/4x^4ay + 1/6\,x^2a^2y^2 - 1/27a^3y^3$

Luis Rodrigo Ugarras Grajales 26/02/2020

ECUACIONES LINEALES

Ecuación : Es una ecuación que establece la igualdad entre 2 expresiones.

→ Cada expresión se llama miembro de la ecuación.

→ La variable de una ecuación normalmente se llama incognita.

Transponer : Proceso de escribir un termino en el otro lado de la ecuación después de cambiar su signo.

Ejemplos: ① $5x + 7 = 0$ (ecuación) (incognita x)

$x = -7/5$ (transponiendo 5 y 7)

② $3x - 5 = 4 - 2x$ ③ $2(2x-5) - 3(x+1)$

④ $1/3(5x-2) = x+2$ ⑤ $\frac{6x+1}{3} = 3x+2$

⑥ $\frac{4x}{3} - \frac{3}{4} = \frac{2}{6} - \frac{x}{8}$

2 R- $3x + 2x = 4 + 5$

$5x = 9$

$x = 9/5$

④ R $= \frac{1}{3}\left(\frac{5}{1}x - \frac{2}{1}\right) = x + 2$

$\frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = x + 2$

$\frac{5}{3}x - \frac{x}{1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{1}$

$\frac{2}{3}x = \frac{8}{3}$

$x = \frac{8}{3} / \frac{2}{3}$

$x = \frac{24}{6}$ $x = 4$

5 R- $\frac{6x+1}{3} = 3x + 2$

$6x + 1 = (3x+2)3$

$6x + 1 = 9x + 6$

$6x - 9x = 6 - 1$

$-3x = 5$

$x = -5/3$

⑥ R- $\frac{4x}{3} + \frac{x}{8} = \frac{2}{6} + \frac{3}{4}$

TAREA

① $2x + 5 = 0$ $x = -5/2$

② $5x - 15 = 0$ $x = 15/5$

③ $3x - 4 = 4x$ $3x - 4x = 4$ $-x = 4$

④ $3x - 2 = 0$ $x = 2/3$

⑤ $6(3x-1) = 5(4x+3)$ $18x - 6 = 20x + 15$ $= 18x - 20x = 15 + 6$

⑥ $-x + 7 = 2x$ $-x - 2x = -7$ $= x = -9$

⑦ $7x + 3 = 2x - 4$ $7x - 2x = -4 - 3$ $= 5x = -7$ $x = -7/5$

⑧ $2(x-5) = 5(4x+3)$ $2x - 10 = 20x + 15$ $= 2x - 20x = 15 + 10$ $x = \frac{25}{8}$

⑨ $8(2x+3) = -5(-3x+2)$

⑩ $4(3x+5) = 7(2x+3)$

⑪ $3/4(3x-2) = 3x$ $x = \frac{24}{12}$

⑫ $2/5(7-1) = 3x - 1$

⑬ $3/7(4x-7) = 2x - 5$ $x = \frac{24}{14}$

⑭ $8x - 3/4 = -2x + 4$ $= 8x + 2x = \frac{16}{4} + \frac{3}{4}$ $= 10x = \frac{19}{4}$ $x = \frac{19}{40}$

⑮ $\frac{15x-1}{8} = 5x - 2$ $15x - 1 = (5x-2)8 = 15x - 1 = 40x - 16$

⑯ $\frac{6x-5}{11} - \frac{9x+5}{3} = -4$

⑰ $\frac{4x+13}{7} - \frac{3x-5}{10} = 1$

⑱ $\frac{7x-10}{5} + \frac{-5x-4}{6} = -1$

⑲ $5x - 1/7 = \frac{3x}{2} + 1/2$

⑳ $\frac{x}{a} - b = \frac{x - b^2}{a + b}$

16. $\frac{6x-5}{11} - \frac{4x+5}{3} = -4$

$\frac{6}{11}x - \frac{5}{11} - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = -4$

$33\left(\frac{6}{11}x - \frac{4}{3}x\right) = \left(-\frac{4}{1} + \frac{5}{11} + \frac{5}{3}\right)33$

$18x - 44x = -132 + 15 + 55$

$-26x = -62$

$x = \frac{-62}{-26}$

$x = 31/13$

22. $\frac{2}{2x+1} = \frac{-3}{7}$ =

$-6x - 3 = 14$

$-6x = 14 + 3$

$x = 17/-6$

23. $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{2x+9} = \frac{2}{(x+5)(2x+9)}$

$(x+5)(2x+9)\left[\frac{1}{x+5} + \frac{1}{2x+9}\right] = (x+5)(2x+9)\left[\frac{2}{(x+5)(2x+9)}\right]$

$2x+9 + x+5 = 2$

$2x + x = 2 - 9 - 5$

$3x = -12$

$x = -12/3$

21. $\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}$

$8(x+1)\left[\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8}\right] = 8(x+1)\left[\frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}\right]$

$\frac{8(x+1)(x)}{x+1} + \frac{8(x+1)(5)}{8} = \frac{8(x+1)(5)}{2(x+1)} + \frac{8(x+1)(3)}{4}$

$8x + 5x + 5 = 20 + 6x + 6$

$8x + 5x - 6x = 20 + 6 - 5$

$7x = 21$

$x = 21/7 \quad x = 3$

1. $\frac{2}{3x+1} = \frac{1}{x}$

$(3x+1)(x)\left[\frac{2}{3x+1}\right] = (3x+1)(x)\left[\frac{1}{x}\right]$

$2x = 3x + 1 \quad 2x - 3x = 1 \quad \boxed{x = 1}$

2. $\frac{2}{x+1} = \frac{-1}{5}$

$(x+1)\left[\frac{2}{x+1}\right] = (x+1)\left[\frac{-1}{5}\right]$

$10 = -x - 1 \quad x = \ldots$

$\boxed{x = -9}$

3. $\frac{2x-5}{4x-1} = \frac{3x-4}{6x+9}$

$(4x-1)(6x+9)\left[\frac{2x-5}{4x-1}\right] = (4x-1)(6x+9)\left[\frac{3x-4}{6x+9}\right]$

$(2x+9)(3x-4)$ [illegible]

$9x^2 - 5x - 12x + 3x = 4 + 32 = 3x - 46 \quad x = 46/3$

4. $\frac{1}{2x+3} - \frac{3}{x-3} = \frac{3}{(x+2)(x-3)}$

[illegible]

5. $\frac{5x+20}{(3x-5)(x+1)} = \frac{2x-7}{x-5} - \frac{6x-6}{3x-5}$

$(3x-5)(x+1)(x-5)\left[\frac{5x+20}{(3x-5)(x+1)}\right] =$

$(3x-5)(x+1)(x-5)\left[\frac{2x-7}{x-5} - \frac{6x-6}{3x-5}\right]$

$6x - 100 = 6x + 35 - 8x + 30$

$6x - 6x + 8x = 35 + 30 + 100$

$8x = 165$

$x = \frac{165}{8}$

$\boxed{x = 20\ 5/8}$

Resolución de problemas con enunciados

Ejemplos:

*Encuentre tres enteros impares consecutivos que la suma sea 69

$(2x+1)+(2x+3)+(2x+5)=69$ 21+23+25

$6x=69-1-3-5$

$x=60/6$

$x=10$

*Un agricultor puede arar un campo en 4 dias, su peon puede arar el mismo campo en 6 dias, utilizando un tractor mas chico. Cuantos dias se requieren para el arado si ellos trabajaron juntos.

$(12x)(1/4+1/6)=\left(\frac{1}{x}\right)12x$

$3x+2x=12$

$5x=12$

$x=12/5$ $x=2\ 2/5$

Cuantos galones de un liquido que tiene el 74% de alcohol deven ser combinados con uno que tiene el 90% de alcohol para obtener una mescla de 84% de alcohol.

	N. de galones	% de alcohol	No. galones % alcohol
1er liquido	$\to x$	74	$0.74x$
2o liquido	$\to 5$	90	4.5
Mescla	$\to (x+5)$	84	$0.84(x+5)$

$0.74x+4.5=0.84(x+5)$ $0.74x-.84x=4.2-4.5$ $-.1x=-.3$ $x=3/1$

$2x + 4y + 3z = \ldots$
$10x - 8y - 9z = \ldots$
$4x + 4y - 3z = 2$

$$D \left| \begin{array}{ccc:cc} 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & -8 & -9 & 10 & -8 \\ 4 & 4 & -3 & 4 & 4 \end{array} \right| = (48 - 144 + 120) - (-96 - 72 - 120) = 312$$

$$\left| \begin{array}{ccc:cc} 3 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \end{array} \right| = (72 - 72 + 0) - (-48 - 108 - 0) = 156$$

$$Dy \left| \begin{array}{ccc:cc} 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & -9 & 10 & 0 \\ 4 & 2 & -3 & 4 & 2 \end{array} \right| = (0 - 108 + 60) - (0 - 36 - 90) = 78$$

$$Dz \left| \begin{array}{ccc:cc} 2 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & -8 & 0 & 10 & -8 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{array} \right| = (-32 + 0 + 120) - (-96 + 0 + 80) = 104$$

$x = \frac{Dx}{D} = \frac{156}{312} = 1/2$

$y = \frac{Dy}{D} = \frac{78}{312} = 1/4$

$z = \frac{Dz}{D} = \frac{104}{312} = 1/3$

$3x + y + z = 1$
$x + 2y - z = 1$
$x + y + 2z = -17$

$$D \left| \begin{array}{ccc:cc} 3 & +1 & +1 & 3 & 1 \\ 1 & +2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & +1 & +2 & 1 & 1 \end{array} \right| = (12 - 1 + 1) - (2 - 3 + 2) = 11$$

$$Dx \left| \begin{array}{ccc:cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -17 & 1 & 2 & -17 & 1 \end{array} \right| = (4 + 17 + 1) - (-34 - 1 + 2) = 55$$

$$Dy \left| \begin{array}{ccc:cc} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -17 & 2 & 1 & -17 \end{array} \right| = (6 - 1 - 17) - (1 + 51 + 2) = -66$$

$$Dz \left| \begin{array}{ccc:cc} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & +1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -17 & 1 & 1 \end{array} \right| = (-102 + 1 + 1) - (2 + 3 - 17) = -88$$

$D\,x = \frac{Dx}{D} = \frac{55}{11} = 5$

$D\,y = \frac{Dy}{D} = \frac{-66}{11} = -6$

$Dz = \frac{Dz}{D} = \frac{-88}{11} = -8$

= ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCOGNITA =
= ECUACIONES CUADRATICAS =

Ecuaciones de segundo grado es toda ecuación en la cual, una vez simplificada, el mayor exponente de la incognita es 2.

Así $3x^2 + 7x + 6 = 0$

es una ecuación de segundo grado

DEDUCCIÓN DE LA FORMULA PARA RESOLVER LA ECUACION GENERAL DE 2° GRADO $ax^2 + bx + c = 0$

La ecuación es - - - - - - - - - → $ax^2 + bx + c = 0$

Multiplicando por $4a$ - - - - - - → $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Sumando b^2 a los dos miembros - - → $4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$

Pasando $4ac$ al 2o miembro - - - → $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

Descomponiendo el primer miembro, que es un trinomio cuadrado perfecto: - - - - → $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Extrayendo la raíz cuadrada a los miembros - - - - - - → $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

Transponiendo b: - - - - - → $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

Despejando x - - - - - - → $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES COMPLETAS DE 2° GRADO SIN DENOMINADORES APLICANDO LA FORMULA GENERAL:

(1) Resolver la ecuación $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Aplicamos la formula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Aquí $a = 3$; $b = -7$, $c = 2$, luego sustituyendo y teniendo presente que al sustituir b se pone con signo cambiado, tendremos

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6}$$

Entonces

$$x_1 = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2 y $\frac{1}{3}$ son las raíces de la ecuación dada y ambas anulan la ecuación.

Sustituyendo x por 2 en la ecuación dada $3x^2 - 7x + 2 = 0$, se tiene:

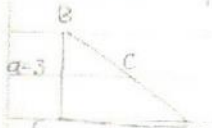
$3(2^2) - 7(2) + 2 = 12 - 14 + 2 = 0$

Sustituyendo x por $\frac{1}{3}$: $3(\frac{1}{3})^2 - 7(\frac{1}{3}) + 2 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3}$ [illegible]

1.- Permisos para otra materia cancelados.
2.- Permisos personales, justificados.
3.- Avisos del grupo con el profesor.
4.- El grupo permanecerá trabajando en aula aunque el profesor no esté.
5.-

= Trigonometría =

Teorema de pitagoras : (Solo se aplica en △ rectangulos)



$c^2 = a^2 + b^2$

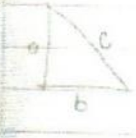
$c^2 = 3^2 + 4^2$

$c = \sqrt{9+16}$

$c = \sqrt{25}$

$c = 5$

1.- Hallar la medida del lado faltante en el siguiente triangulo rectangulo.



a) $a = 4$, $b = 8$, $c = ?$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4^2 + 8^2$

$c = \sqrt{16+64}$

$c = \sqrt{80}$ $c = 8.94$

b) $c = 9$, $b = 3$, $a = ?$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 - b^2 = a^2$

$(9)^2 - (3)^2 = a^2$

$(81) - (9) = a^2$

$72 = a^2$

$\sqrt{72} = a$ $a = 8.48$

c) $a = 6$, $c = 13$, $b = ?$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 - a^2 = b^2$

$(13)^2 - (6)^2 = b^2$

$(169) - (36) = b^2$

$133 = b^2$

$\sqrt{133} = b$ $b = 11.53$

2-17-33
2-13-06

(2)

$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = (6)^2 + (10)^2$
$c^2 = 36 + 100$
$c = \sqrt{136}$. diagonal mide = 11.66
$c = 11.66$

(3)

$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 - a^2 = b^2$
$(12)^2 - (6)^2 = b^2$
$144 - 36 = b^2$
$\sqrt{108} = b$

$b = 10.19$
$b = h$

= Funciones Trigonométricas =

Sen A = $\frac{a}{c}$ — Sen B = $\frac{b}{c}$
Cos A = $\frac{b}{c}$ — Cos B = $\frac{a}{c}$
Tan A = $\frac{a}{b}$ — tan B = $\frac{b}{a}$
Cot A = $\frac{b}{a}$ — Cot B = $\frac{a}{b}$
Sec A = $\frac{c}{b}$ — Sec B = $\frac{c}{a}$
Csc A = $\frac{c}{a}$ — Csc B = $\frac{c}{b}$

Ejercicio: En cada uno de los sig. Δs identificar los catetos y la hipotenusa.

a) C.O. = a, C.A. = b, h = c   b) C.O. = [illegible], C.A. = c, h = a   c) C.O. = F, C.A. = h, h = g

6) Dado sen A = $\frac{5}{13}$, encontrar el valor del lado desconocido y obtener las demas funciones.

sen A = $\frac{5}{13}$ A = 22.6 $169 = 5^2 + b^2$
cos A = $\frac{12}{13}$ A = 22°37' $169 - 25 = b^2$
tan A = $\frac{5}{12}$ A = 22.6
cot A = $\frac{12}{5}$
sec A = $\frac{13}{12}$
csc A = $\frac{13}{5}$

(3) Resolver el Δ rectangulo s.:

Datos

a) $A = 65°20'$

$C = 75$ m

a) 

$B = 90° - 65°20'$

$B = 24°40'$

$\text{Sen } A = \frac{a}{75}$

$(75)\text{Sen } 65°20' = a$

$a = 68.15$

$\cos A = \frac{b}{c}$ $(75)(\cos 65°20') =$

$b = 81.20$

b) Datos

$B = 24°40'$ $C = 90°$ $A = 90 : 24°40$

$a = 68.16$m $A = 65°20'$

$b = 81.20$m $C^2 = 68.16 + 81.20^2$

$C = \sqrt{5625}$

$C = 75$m

c) Datos

$a = 46.2$m $C = 49.63$m

$b = 20.5$m $A = 65°36'$ $B = 24°23'$

d) = Datos $C = 591$ cm

$a = 279$ cm $A = 28'10'$

$b = 521$ cm $B = 61°49'$

Inclinacion 

(2) Una escalera alkansa el bord' d' una ventana q' esta 7.8 m de altura y forma un angulo con la pared un angulo de 29°15'. Hallar la medida de la escalera:

(8) Hallar la altura de una torre si la sombra proyectada esta a 156 m al pie de la vertical estando el sol a 78° sobre el horizonte.

(4) Dsd' la altura d' una torre d' 27m los ∢ de presión d' dos objetos situados en el mismo lado y en la misma linea del horizontal del pie del edificio son respectivamente 10°13' y 15°46', hallar la distancia entre los dos objetos.

(5) Calcular la altura de una torre si desde un punto situado a 4 kilometros de la base se ve la cuspide con un angulo de elevación de 16°45'

∢ de angulo de depresion

∢ de elevacion

(1) Una columna d' 27m d' altura proyecta sobre el piso una sombra d' 35.10m sobre el piso.
Hallar el angulo d' inclinacion del sol.

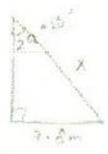
$$\tan A = \frac{\text{Cat. ady}}{\text{Cat. op.}} = \frac{27}{35.10}$$

$$\tan B = \frac{27}{35.10}$$

$$\tan B = .7692$$

$$37°34'$$

(2) Una escalera alcanza el borde de una ventana que esta a 7.8m del suelo y forma con la pared un angulo de 27°15'. Hallar la medida de la escalera.



$$\text{Sen } 27°15' = \frac{C.\ op}{h}$$

$$\text{Sen } 27°15' = \frac{x}{7.8}$$

$$x = .4886 \times 7.8$$

$$x = 3.8112$$

(3) Hallar la altura de un avion, si la sombra proyectada esta a 156m de pie de la vertical, estando el sol a 78° sobre el horizonte.

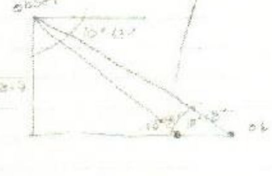
$$\tan 78° = \frac{C.\ Op}{C.\ ady}$$

$$\tan 78° = \frac{156}{x}$$

$$x = \frac{156}{4.7046}$$

$$x = 33.159\ m$$

(4) Desde lo alto de una torre de 27m los angulos de depresion de dos objetos situados en un mismo lado y en la misma linea horizontal del pie del edificio, son respectivamente 10°13' y 15°56'.
Entre los dos objetos.



$$\tan 10°13 = \frac{C.\ op}{C.\ ady}$$

$$\tan 10°13' = \frac{27}{x}$$

$$x = \frac{27}{.1802}$$

$$x = \frac{205.83}{15°56'} = \frac{27}{x}$$

$$x = \frac{27}{.2853}$$

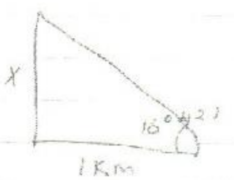
angulo de dep = ang. de elevación

$$x = 131.07$$

$$205.83 - 131.07$$

$$= 74.23$$

(5) Calcular la altura de una torre, si desde un punto situado a 1 Km. de base se ve la cuspide con un angulo de elevacion de $16°42'$



$\tan 16°42' = \frac{cat. op}{cat. ady}$

$\tan 16°42' = \frac{x}{1000}$

$x = 300\,m$

$X = .3000 \times 1000$

Ley d' senos $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$

Ley d' Cosenos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ [illegible]

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ [illegible]

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ [illegible]

$\frac{24m}{5.8m} = \frac{1.83}{x}$

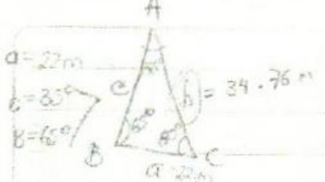
Ejercicio Resolver los siguiente $\triangle$ oblicuangulos.

(1) Datos	(2) Datos	(3)	(4)
$a = 22m$	$c = 16m$	$a = 125m$	$a = 26m$
$B = 35°$	$A = 110°10'$	$b = 230$	$b = 18m$
$B = 68°$	$B = 58°$	$C = 30°10'$	[illegible]

Dos personas de frente a 2000m de lejo d' los ojos del mismo nivel horizontal, observan un avion con angulos de elevacion de $50°10'$ y $65°10'$. Hallar la altura de la avion.

(4) Un terreno esta limitado x tres calles que se cortan, los lados del terreno miden [illegible] m y [illegible], los [illegible] los $\angle$ formados por las calles al cruzarse.

(5) Una montaña se para los puntos "A" y "B", la distancia [illegible] [illegible] a 300m [illegible] angulo 60° 40' hallar la distancia [illegible]



$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B}$

$\frac{(a)(\text{sen } B)}{\text{Sen } A}$

$\frac{22m}{\text{Sen } 35^\circ} = \frac{b}{\text{Sen } 65^\circ}$

$\frac{(22)(65^\circ)}{35^\circ}$

$b = \frac{(22)(\text{Sen } 65^\circ)}{\text{Sen } 35^\circ}$

$b = 34.76\ m$

$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$

$c = \frac{(b)(\text{sen } c)}{\text{Sen } B} = \frac{(34.76)(\text{Sen } 80^\circ)}{\text{Sen } 65^\circ}$

$\boxed{c = 37.77}$

$c = \frac{(a) \times (\text{sen } b)}{\text{Sen } A} = \frac{22 \times \text{Sen } 80^\circ}{\text{Sen } 35^\circ}$

$c = 37.77$

NOTAS DE MATEMÁTICAS II, DE LA ALUMNA ROSA ALICIA CIGARROA GRAJALES, QUIEN PASÓ EN LIMPIO SUS APUNTES Y LO PRESENTÓ AL FINAL DEL SEMESTRE PARA AUMENTAR PUNTOS EN SU CALIFICACIÓN RESPECTIVA.

Facultad de Ciencias Agronomicas
Campus V

Matematicas

Rosa Alicia Cigarroa Grajales

Catedratico
Luis Alberto Besares Coutiño

FORMULA DE DERIVACION
ALGEBRAICA

1o.- $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2o.- $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3o.- $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

4o.- $\frac{d}{dx}(V^n) = nV^{n-1}\frac{d}{dx}V$

5o.- $\frac{d}{dx}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V\frac{d}{dx}(U) - (U)\frac{d}{dx}V}{V^2}$

6o.- $\frac{d}{dx}(U.V) = \frac{d}{dx}(U) + (V)\frac{d}{dx}U$

7o.- $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

8o.- $\frac{d}{dx}(U+V+W) = \frac{d}{dx}U + \frac{d}{dx}V + \frac{d}{dx}W$

9o.- $\frac{d}{dx}(\sqrt{V}) = \frac{\frac{d}{dx}V}{2\sqrt{V}}$

10o.- $\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{nx\left(\frac{n-1}{n}\right)}$

11o.- $\frac{d}{dx}(\sqrt[n]{V}) = \frac{\frac{d}{dx}V}{nV\left(\frac{n-1}{n}\right)}$

12o.- $\frac{d}{dx}(C \cdot V) = C\frac{d}{dx}V$

13o.- $\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{V}\right) = -\frac{C\frac{d}{dx}V}{V^2}$

14o.- $\frac{d}{dx}\left(\frac{V}{C}\right) = \frac{\frac{d}{dx}V}{C}$

NOTAS

C = constante
x, U, V, W = Variable
n = Exponente ó indice de la raíz.

APICACION DE DERIVADAS

1o.- $\frac{d}{dx}(C) = 0$

2o.- $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3o.- $\frac{d}{dx}(x^2) = 2(x)^{2-1} = 2x$

4o.- $\frac{d}{dx}(\underbrace{x^2+3}_{v})^3 = 3(x^2+3)^{3-1}\frac{d}{dx}(x^2+3) = 3(x^2+3)^2(2x^{2-1}) =$

$3(x^2+3)^2(2x) = 6x(x^2+3)$

5o.- $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+2}{x^3-2}\right) = \frac{(x^3-2)\frac{d}{dx}(x^3+2) - (x^3+2)\frac{d}{dx}(x^3-2)}{(x^3-2)^2}$

$= \frac{(x^3-2)(3x^2) - (x^3+2)(3x^2)}{(x^3-2)^2} = \frac{3x^5-6x^2-3x^5-6x^2}{(x^3-2)^2} = \frac{-12x^2}{(x^3-2)^2}$

6o.- $\frac{d}{dx}(\underbrace{x^2-5}_{u})(\underbrace{3x^2+3}_{v}) = (x^2-5)\frac{d}{dx}(3x^2+3) + (3x^2+3)\frac{d}{dx}(x^2-5)$

$= (x^2-5)(6x) + (3x^2+3)(2x) = 6x^3-30x+6x^3+6x = 12x^3-24x$

7o.- $y = \sqrt{x} = y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{\frac{2-1}{2}}} = \frac{1}{2x^{1/2}}$

8o.- $y = \sqrt{3x^3-2}$ $y' = \frac{\frac{d}{dx}(3x^3-2)}{2\sqrt{3x^3-2}} = \frac{9x^2}{2\sqrt{3x^3-2}}$

9o.- $y = \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3x^{\frac{3-1}{3}}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$

10o.- $y = \sqrt[3]{5x^2+5} = \frac{\frac{d}{dx}(5x^2+5)}{3(5x^2+5)^{\frac{3-1}{3}}} = \frac{10x}{3(5x^2+5)^{2/3}}$

11o.- $y = 8(4x^2-5)^{1/3} = 8\frac{d}{dx}(\underbrace{4x^2-5}_{v})^{1/3 \to n} = 8\left[\frac{1}{3}(4x^2-5)^{\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dx}(4x^2-5)\right]$

$= 8\left[\frac{1}{3}(4x^2-5)^{-2/3}(8x)\right] = 8\left[\frac{8x}{3(4x^2-5)^{2/3}}\right] = \frac{64x}{3(4x^2-5)^{2/3}}$

12o.- $y = \frac{5}{\sqrt[3]{3x^3-6}} = \frac{-5\frac{d}{dx}\sqrt[3]{3x^3-6}}{\left[\sqrt[3]{3x^3-6}\right]^2} = \frac{-5\frac{\frac{d}{dx}(3x^3-6)}{3(3x^3-6)^{\frac{3-1}{3}}}}{\left[(3x^3-6)^{1/3}\right]^2}$

$= \frac{-5}{1}\left[\frac{\frac{(9x^2)}{3(3x^3-6)^{2/3}}}{\frac{(3x^3-6)^{2/3}}{1}}\right] = \frac{-45x^2}{3(3x^3-6)^{4/3}} = \frac{-15x^2}{(3x^3-6)^{4/3}}$

13o.- $y = \frac{(x^3-3x^2+5x-2)}{2} = \frac{\frac{d}{dx}(\underbrace{x^3-3x^2+5x-2}_{v})^{2 \to n}}{2}$

$= \frac{\cancel{2}(x^3-3x^2+5x-2)\frac{d}{dx}(x^3-3x^2+5x-2)}{\cancel{2}} = (x^3-3x^2+5x-2)(3x^2-6x+5)$

14o.- $y = 4\sqrt[4]{2x^3-5}$ Para $x = 2$

$y = 4\frac{d}{dx}\sqrt[4]{2x^3-5} = \cancel{4}\frac{6x^2}{\cancel{4}(2x^3-5)^{3/4}} = \frac{6x^2}{(2x^3-5)^{3/4}}$

$= \frac{6(2)^2}{[2(2)^3-5]^{3/4}} = \frac{24}{(11)^{3/4}} = \frac{24}{\sqrt[4]{11^3}} = \frac{24}{6.04} = 3.97$

Para $x = 2$

15.- $y = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2+5}{3x^2-5}\right) = \frac{3x^2-5\frac{d}{dx}(3x^2+5)-(3x^2+5)\frac{d}{dx}(3x^2-5)}{(3x^2-5)^2}$

$= \frac{3x^2-5(6x)-(3x^2+5)(6x)}{(3x^2-5)^2} = \frac{\cancel{18}x^2-30x-\cancel{18}x^2-30x}{(3x^2-5)^2}$

$= \frac{-60x}{(3x^2-5)^2} = \frac{-60(2)^2}{[3(2)^2-5]^2} = \frac{-120}{49} = -2.4489$

Para $x = 1.5$

16.- $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{2x^2-3}{5}}\right) = \left(\frac{2x^2-3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dx}\frac{\frac{2x^2-3}{2\sqrt{2x^2-3}}}{5} = \left[\frac{\frac{6x^2}{2\sqrt{2x^2-5}}}{\frac{5}{1}}\right] = \frac{6x^2}{(3x^2-5)^2}$

$= \frac{6(1.5)^2}{10\sqrt{2(1.5)^2-3}} = \frac{13.5}{19.36} = 0.6973$

Para $x = 3$

17.- $y = \sqrt[3]{x^2-5} = \frac{\frac{d}{dx}(x^2-5)}{3(x^2-5)\left(\frac{3-1}{3}\right)} = \frac{2x}{3(x^2-5)^{2/3}} = \frac{2(3)}{3[(3)^2-5]^{2/3}} = \frac{6}{3(4)^{2/3}}$

$= \frac{6}{3.52} = \frac{6}{7.56} = 0.7936$

Para $x = 1$

18.- $y = \frac{4}{(x^2-3)^2} = \frac{-4\frac{d}{dx}(x^2-3)^2}{[(x^2-3)^2]^2} = \frac{(-4)\left[2(x^2-3)^{2-1}\frac{d}{dx}(x^2-3)\right]}{(x^2-3)^4}$

$y = \frac{(-4)[2(x^2-3)(3x^2)]}{(x^2-3)^4} = \frac{(-4)6x^2(x^2-3)}{(x^2-3)^4} = \frac{-24x^2(x^2-3)}{(x^2-3)}$

$y = \frac{-24x^2}{(x^2-3)^3} = \frac{-24(1)^2}{[(1)^2-3]^3} = \frac{-24}{-8} = 3$

Para $x = 0.5$

21.- $10(2x^2-5)^3 = 10\frac{d}{dx}(2x^2-5)^4 = 10\left[3(2x^2-5)^{3-1}\frac{d}{dx}(2x^2-5)\right]$

$y = 10[3(2x^2-5)^2(8x^2)] = (240x^2)(2x^2-5)^2$

$y = [240(0.5)^2][2(0.5)^2-5] = (30)(23.76) = 712.8$

22.- $y = \sqrt[3]{(4x^2+3)^2} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{(4x^2+3)^2}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(4x^2+3)^2}{3(4x^2+3)^2\left(\frac{3-1}{3}\right)} = \frac{121x}{3[(4x^2+3)^2]^{2/3}}$

$y = \frac{121(2.8)}{3[(4(2.8)^2+3)^2]^{2/3}} = \frac{338.8}{3(480.6)^{2/3}} = \frac{338.8}{3(111.7)} = \frac{338.8}{335.1} = 1.01$

Para $x = 3$

23.- $y = (6x^2+5x+2)^3 = \frac{d}{dx}6x^2 + \frac{d}{dx}5x + \frac{d}{dx}3$

$y = 12x+5$

$y = 12(3)+5$

$y = 41$

Para $x = 4$

24.- $y = 3(6x^2-5)^{2/5} = 3\frac{d}{dx}(6x^2-5)^{2/5}$

$y = 3\left[\frac{2}{5}(6x^2-5)^{2/5-1}\frac{d}{dx}(6x^2-5)\right]$

$y = 3\left[\frac{2}{5}(6x^2-5)^{0.6}(12x)\right]$

$y = (14.4x)(6x^2-5)^{0.6}$

$y = (14.4(4))[6(4)-5]^{0.6}$

$y = 337.0347$

Para $x = 5.2$

25.- $y = \frac{3}{5}(2x^3+8)^{-5} = \frac{3}{5}\left(\frac{d}{dx}2x^3+\frac{d}{dx}8\right)^{-5} = \frac{3}{5}(6x^2+0)^{-5}$

$= \frac{3}{5}\frac{d}{dx}(6x^2+0)^{-5} = \frac{3}{5}\left[-5(6x^2+0)^{-6}(12x+0)\right]$

$= \frac{3}{5}\left[-5(6(5.2)^2+0)^{-6}(12(5.2)+0)\right] = \frac{3}{5}(-1185.6)$

$x = -711.36$

26 - $y = \frac{5x}{(5-2x)^3} = \frac{d}{dx}\frac{5x}{(5-2x)^3} = \frac{(5-2x)^3\frac{d}{dx}5x - 5x\frac{d}{dx}(5-2x)^{3-1}}{[(5-2x)^3]^2}$ $\quad x=0$

$= \frac{(5-2x)^3(5) - (5x)(3(5-2x)^2\frac{d}{dx}5-2x)}{(5-2x)^6} = \frac{(5-2x)(5)-(5x)(3)(-2)}{(5-2x)^4}$

$= \frac{25-10x+30x}{(5-2x)^4} = \frac{25+20x}{(5-2x)} = \frac{25+20(0)}{(5-2(0))} = \frac{25}{625} = 0.04$

27 - $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 5 = 2\frac{d}{dx}\sqrt{x} + \frac{1\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x})^2} + \frac{d}{dx}5$ $\quad x=1$

$= \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{3x^{2/3}}}{\frac{x^{2/3}}{1}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3x^{4/3}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{3(1)^{4/3}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$

$y = 1.33$

28 - $y = \sqrt{\frac{x^2+3}{x^2-3}} = y' \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3}{x^2-3}\right)}{2\sqrt{\frac{x^2+3}{x^2-3}}} = \frac{\frac{(x^2+3)\frac{d}{dx}(x^2-3) - (x^2-3)\frac{d}{dx}(x^2+3)}{(x^2-3)}}{2\sqrt{\frac{x^2+3}{x^2-3}}}$ $\quad x=2$

$y' = \frac{\frac{(x^2+3)(2x)-(x^2-3)(2x)}{(x^2-3)^2}}{\frac{2\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2-3}}} = \frac{\frac{2x^3+6x-2x^3+6x}{(x^2-3)^2}}{\frac{2\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^2-3}}} = \frac{12x\sqrt{x^2-3}}{2\sqrt{x^2+3}(x^2-3)^2}$

$= \frac{6x(x^2-3)^{1/2}}{2\sqrt{x^2+3}(x^2-3)} = \frac{6x}{2\sqrt{x^2+3}(x^2-3)^{1/2}} = \frac{6(2)}{2.6457(1)^{1/2}} = \frac{12}{2.6457} = 4.5356$

$x = 2$

29 - $y = \frac{3}{x^2-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{-u\frac{d}{dx}v}{v^2} = \frac{-3\frac{d}{dx}(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-3(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-6(2)}{[(2)^2-1]^2}$

$= \frac{-12}{(4-1)^2} = \frac{-12}{(3)^2} = \frac{-12}{9} = -1.33$

30 - $y = \sqrt[3]{\frac{x^2-5}{x^2+5}} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-5}{x^2+5}\right)}{3\left(\frac{x^2-5}{x^2+5}\right)^{\left(\frac{3-1}{3}\right)}} = \frac{\frac{(x^2+5)\frac{d}{dx}(x^2-5)-(x^2-5)\frac{d}{dx}(x^2+5)}{(x^2+5)^2}}{\frac{3(x^2-5)^{2/3}}{(x^2+5)^{2/3}}}$ $\quad x=1.5$

$= \frac{\frac{(3x^2+15x^2)-(3x^2-15x^2)}{(x^2+5)^2}}{\frac{3(x^2-5)^{2/3}}{(x^2+5)^{2/3}}} = \frac{\frac{30x^2}{(x^2+5)^2}}{\frac{3(x^2-5)^{2/3}}{(x^2+5)^{2/3}}} = \frac{30x^2(x^2+5)^{2/3}}{3(x^2-5)^{2/3}(x^2+5)^2} = \frac{10x^2}{(x^2-5)^{2/3}(x^2+5)^{4/3}}$

$= \frac{10(1.5)^2}{[(1.5)^2-5]^{2/3}[(1.5)^2+5]^{4/3}} = \frac{22.5}{(1.88)(1639.9)} = \frac{22.5}{1xxx.xx} = 0.xx06$

31 - $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x} + \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} =$ $\quad x=3$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{3x^{4/3}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3(3)^{4/3}} = 1+1+\frac{1}{81} = \frac{3}{81} = 0.03703$

32 - $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^3}\right) = \left(\frac{-1\frac{d}{dx}(x)}{x^2}\right) + \left(\frac{-2\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}\right) +$

$\left(-3\frac{d}{dx}(x^3)\right) = \left(\frac{-1(1)}{x^2}\right) + \left(\frac{-2(2x)}{x^4}\right) + \left(\frac{-3(3x^2)}{x^6}\right) = \left(\frac{-1}{x^2}\right) + \left(\frac{-4x}{x^4}\right) + \left(\frac{-9x^2}{x^6}\right)$

$\left(\frac{-1}{(2.3)^2}\right) + \left(\frac{-4}{(2.3)^3}\right) + \left(\frac{-9}{(2.3)^4}\right) = (-0.18) + (-0.32) + (-0.32) = -0.18 -$

$0.32 - 0.32 - 0.32 = -0.82$

33.- $y = \frac{\sqrt{x^3}}{x-2} = \frac{-\sqrt{x^3}\frac{d}{dx}(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{-\sqrt{x^3}(1)}{(x-2)^2} = \frac{-\sqrt{(5)^3}(1)}{(5-2)^2}$ $\quad x = 5$

$= \frac{-11.18(1)}{9} = \frac{11.81}{9} = 1.3122$

34.- $y = \sqrt[5]{4x^2-12x} = \frac{d}{dx}\frac{(4)x^2-12x}{3(4x^2-12x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{8-12}{3(4x^2-12x)^{\frac{2}{3}}}$ $\quad x = 1.8$

$= \frac{8(1.8)-12}{3[4(1.8)^2-12(1.8)]^{2/3}} = \frac{2.4}{3(12.96-21.6)^{2/3}} = \frac{2.4}{12.6\,?15} = 0.19$

35.- $y = 2x^3 - 3x^2 + 12 = 2\frac{d}{dx}x^3 - 3\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}12 = (2)(3x) - (3)(2x)^{2-1}$

$= 6x^2 - 6x = 6(\sqrt{5})^2 - 6(2.236) = 30 - 13.416 = 16.584$ $\quad x = \sqrt{5}$

$x = 2$

36.- $y = \frac{x^3}{x^2+12} = \frac{(x^2+12)\frac{d}{dx}(x^3) - (x^3)\frac{d}{dx}(x^2+12)}{(x^2+12)^2} = \frac{(x^2+12)(3x^2) - (x^3)(2x)}{(x^2+12)^2}$

$= \frac{3x^4 + 36x^2 - 2x^4}{(x^2+12)^2} = \frac{x^4 + 36x^2}{(x^2+12)^2} = \frac{(2)^4 + 36(2)^2}{((2)^2+12)^2} = \frac{160}{256} = 0.625$

37.- $y = \frac{x}{x^2-4x+3} = \frac{(x^2-4x+3)\frac{d}{dx}(x) - (x)\frac{d}{dx}(x^2-4x+3)}{(x^2-4x+3)^2}$ $\quad x = 1$

$= \frac{(x^2-4x+3) - (x)\frac{d}{dx}x^2 \frac{d}{dx}4x}{(x^2-4x+3)^2} = \frac{(x^2-4x+3) - (x)(4x)(4)}{(x^2-4x-3)^2} = \frac{(x^2-4x+3) - 16x^2}{(x^2-4x-3)^2} = \frac{-16x^2\ (x^2-4x\ \ldots)}{(x^2-4x+3)^2}$

$y = \frac{-16(1)^2 + 64(1)^2 + 48(1)^2}{[(1)^2-4(1)+3]^2} = -16 + 64 - 48 = 0$

38.- $y = \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x^2-4\frac{d}{dx}x^2 - x^2\frac{d}{dx}x^2-4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2-4(2x) - x^2(2x)}{(x^2-4)^2}$ $\quad x = 3$

$= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = \frac{-8(3)}{((3)^2-4)^2} = \frac{-24}{25} = -0.96$

39.- $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4 = \frac{1-x\frac{d}{dx}(1+x)^4 - (1+x)^4\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2}$ $\quad x = 1/3$

$= \frac{1-x(4x^3) - (4x^3)(1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)12x^2 - 12x^2(1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)(1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-1/3)(1)}{(1+1/3)^2}$

$= \frac{\frac{2}{3}}{(\frac{2}{3})^2} = 1\frac{1}{2} = 1.5$

Para $x = 2$

40.- $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{d}{dx}\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2\frac{d}{dx}(x+1)^3 - (x+1)^3\frac{d}{dx}(x-1)^2}{((x-1)^2)^2}$

$\frac{(x-1)^2 3(x+1)^2 - (x+1)^3 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)3(x+1)^2 - (x+1)^3(2)}{(x-1)^3}$

$\frac{(x-1)3(x^2+2x+1) - (x^3+3x^2+3x+1)(2)}{(x-1)^3} = \frac{(3x-3)(x^2+2x+1)}{(x-1)^3}$

$= -2x^3 + 6x^2 - 6x - 2 = 2(2)^3 - 6(2)^2 - 6(2) - 2 = -22$

Para $x=3$

41.- $y=\left(\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\right)^3 = 3\left(\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\right)^{3-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\right)$

$=3\left(\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left[3\left(\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)\right]$

$=\frac{d}{dx}3\left(\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\right)+\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)\frac{d}{dx}3\left(\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)$

$=3\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)+\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)\frac{3}{1}\left(\frac{\sqrt{2x}}{x}\right)\frac{\sqrt{6x}}{x}\left(\frac{\sqrt{6x}}{x}\right)\left[\frac{\sqrt{6x}}{x}+\frac{\sqrt{6x}}{x}\left(\frac{\sqrt{6x}}{x}\right)\right]$

$=\left(\frac{\sqrt{36x}}{x^2}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{12x}}{x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{6x}}{x}\right)\right]=\left(\frac{\sqrt{36x}}{x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{72x}}{x^2}\right)$

$=\frac{6x}{x}\left(\frac{8.48x}{x}\right)=\frac{6(3)}{3}\left(\frac{8.48(3)}{3}\right)=\frac{18}{3}\left(\frac{25.41}{3}\right)=\frac{457.92}{9}=50.88$

$x=1$

42.- $y=(4x^3-3)^2\sqrt{4x^3+3}=$

$\frac{d}{dx}(4x^3-3)^2=2(4x^3-3)^{2-1}\frac{d}{dx}(4x^3-3)\sqrt{4x^3+3}=$

$12x^2=\left[2(4x^3-3)^1\right](12x^2)\frac{\frac{d}{dx}(4x^3+3)}{2\sqrt{4x^3+3}}=12x^2\left[2(4x^3-3)^1\right](12x^2)\frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3+3}}=$

$=12(1)^2\left[2(4(1)^3-3)^1\right](12(1)^2)\frac{(12(1)^2)}{2\sqrt{4(1)^3+3}}=\frac{12}{2(2.64)}=2.27$

Para $x=-2$

43.- $y=6x^3-3x^2+2x+1=6(-2)^3-3(-2)^2+2(-2)+1$

$=-48-12-3=-63$

Para $x=2$

44.- $y=10x\sqrt[3]{x^2-3}=10x\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2-3}\right)=$

$10x\frac{\frac{d}{dx}(x^2-3)}{3(x^2-3)\left(\frac{3-1}{3}\right)}=\frac{10x(2x)}{3(x^2-3)\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{10(2)(2(2))}{3((2)^2-3)^{2/3}}=\frac{80}{(12-3)^{2/3}}=$

$=\frac{80}{(9)^{2/3}}=\frac{80}{27}=2.9629$

Para $x=-1$

45.- $y=\frac{-5}{(6x^2-3)}=\frac{5\frac{d}{dx}(6x^2-3)}{(6x^2-3)^2}=\frac{5(12x)}{(6x^2-3)^2}$

$=\frac{5[12(-1)]}{[6(-1)^2-3]^2}=\frac{-60}{9}=-6.66$

Para $x=2$

46.- $y=\frac{3x^2-2x+5}{x-2}=\frac{(x-2)\frac{d}{dx}(3x^2-2x+5)-(3x^2-2x+5)\frac{d}{dx}(x-2)}{(x-2)^2}$

$=\frac{(x-2)(6x-2)-(3x^2-2x+5)(1)}{(x-2)^2}=\frac{(2-2)[6(2)-2]-[3(2)^2-2(2)+5]}{(2-2)^2}$

$=\frac{-13(1)}{0}=\frac{-13}{0}=0$

Para $x=0$

47.- $y=\frac{\sqrt{3x^2-5}}{3x^3+5}=\frac{(3x^3+5)\frac{d}{dx}(\sqrt{3x^2-5})-(\sqrt{3x^2-5})\frac{d}{dx}(3x^3+5)}{(3x^3+5)^2}$

$\frac{(3x^3+5)(\sqrt{9x^2})-(\sqrt{3x^2-5})(9x^2)}{(3x^3+5)^2}$

$=\frac{[3(0)^3+5](\sqrt{9(0)^2})-(\sqrt{3(0)^2-5})[9(0)^2]}{[3(0)^3+5]^2}=\frac{5(0)-(-5)(0)}{25}$

$=\frac{0}{25}=0$

Para $x=-1$

48.- $y=\frac{\sqrt[3]{x^2+2x-3}}{x^2-2x+3}=\frac{(x^2-2x+3)\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2+2x-3})-(\sqrt{x^2+2x-3})\frac{d}{dx}(x^2-2x+3)}{(x^2-2x+3)^2}$

$=\frac{(x^2-2x+3)(2x+2)-(\sqrt{x^2+2x-3})(2x-2)}{(x^2-2x+3)^2}$

$=\frac{[(-1)^2-2(-1)+3][2(-1)+2]-(\sqrt{(-1)^2+2(-1)-3})[2(-1)-2]}{[(-1)^2-2(-1)+3]^2}=\frac{6(0)+2(-4)}{36}$

$=\frac{-8}{36}=-0.2222$

49.- $y=(4x^2-5x-3)^{-1/3}$ Para $x=0$

$=-1/3(4x^2-5x-3)^{-1/3-1}\frac{d}{dx}(4x^2-5x-3)=$

$-1/3(4x^2-5x-3)-1^1/_3(8x-5)=$

$-1/3[4(0)^2-5(0)-3]-1^1/_3[8(0)-5]$

$=-1/3(-3)-1^1/_3(-5)=$

$=1-(-5)=6$

50.- $y=(2x^3-5)^{-4/3}=-4/3(2x^3-5)^{-4/3-1}\frac{d}{dx}(2x^3-5)$ Para $x=-3$

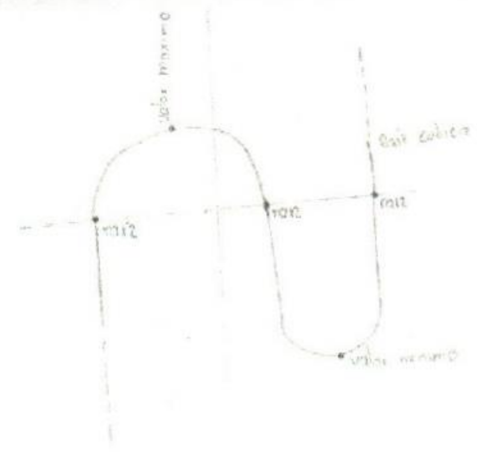
$=-4/3(2x^3-5)-2^1/_3(6x^2)=-4/3(2(-3)^3-5)-2^1/_3(6(-3)^2=-47^1/_3$

$=-47.33$

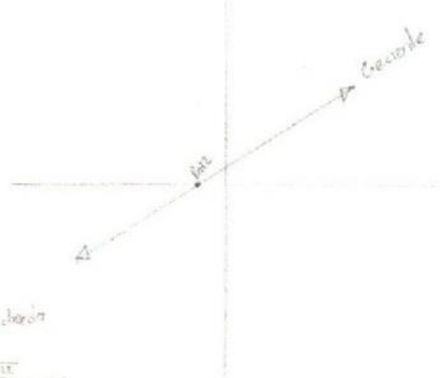
DERIVADAS MAXIMAS y MINIMAS

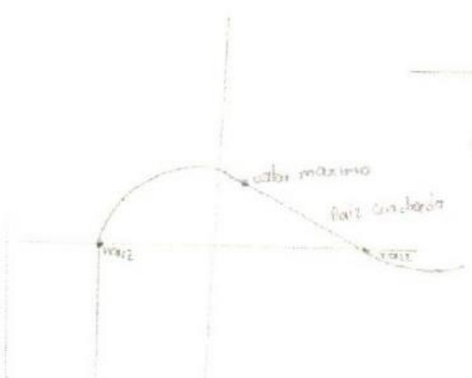
Se trata de encontrar el valor maximo o minimo o ambos de una función como valores absolutos. para encontrar el maximo minimo de una función se hace lo siguiente:

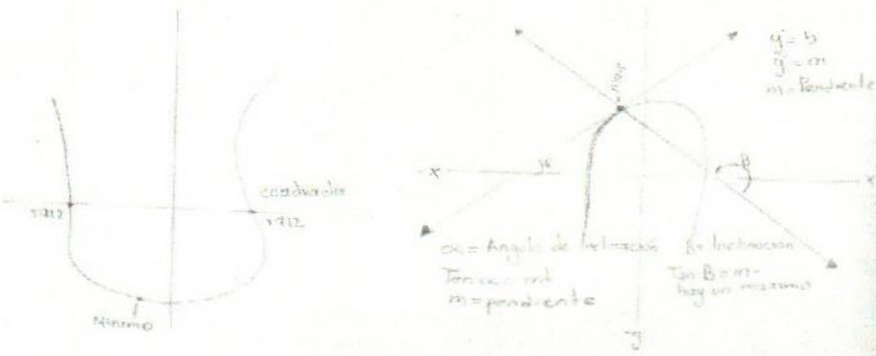
1o.- Se encuentra la primera derivada.
2o.- Se encuentran sus raices.
3o.- Se encuentra la segunda derivada.
4o.- Se prueva en esta segunda derivada las raices de la primera derivada.
5o.- Se concluye; si resulta positivo hay un minimo, si resulta negativo hay un maximo y si da cero no hay maximo ni minimo.

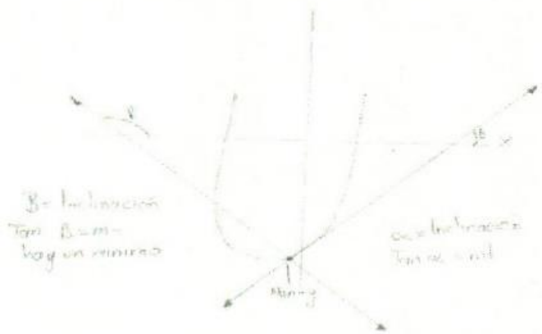


- Estos valores son adsolutos.









51.-

Por Ejemplo

$y = x^2+2$

Para $x = 3$

$y' = 2x$

$y' = 2(3) = 6$

$m = 6$

x	y
5	27
4	18
3	11
2	6
1	3
0	2
-1	3
-2	6

Recta tangente

$P(3,11) \quad m = 6$

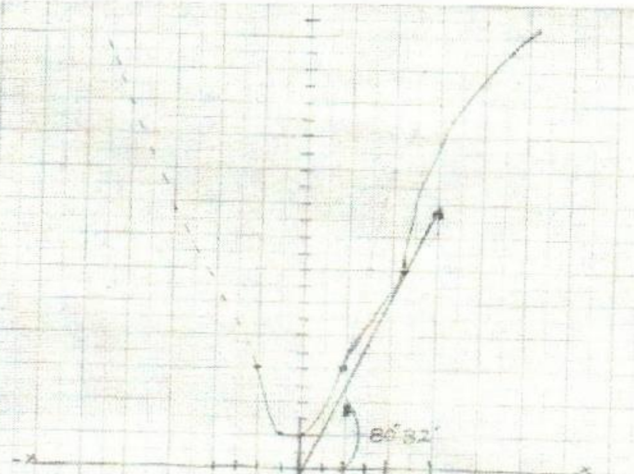
$y - y' = m(x - x_1)$

$y - 11 = 6(x-3)$

$y = 6x - 18 + 11$

$y = 6x - 7$

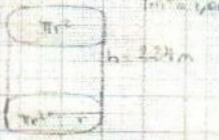
x	y
3	11
1	-1



* La derivada es la pendiente de una recta tangente en un punto de una Curva.

52.- Se quiere constroir en un rancho un deposito de agua de forma de Cilindro circular recto de material metalico cuya capacidad sea de 10,000 Lt, de agua. Que dimensiones debe de tener para que en su constrccion lleve la menor cantidad de material posible con tapa.

$V = 10,000$ Lt.
$1 m^3 = 1,000$ Lts.



$A\,min = 2\pi r(r+h) = 2\pi r\left(r + \frac{10}{\pi r^2}\right)$

$10,000\ Lts \cdot \frac{1 m^3}{1,000\ Lts} = 10\ m^3$

$10 = \pi r^2 h$

$\frac{10}{\pi r^2} = h$

Area del Cilindro: $\underbrace{2\pi r^2}_{\text{Area de la base mas la tapa}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{Area de la pared lateral}}$

$A\ min = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{10}{\pi r^2}\right)$

$A\ min = 2\pi r^2 + \frac{20}{r}$

$\frac{4\pi r}{1} - \frac{20}{r^2} = 0$

$\frac{4\pi r^3 - 20}{r^2} = 0$

$4\pi r^3 = 20$

$r^3 = \frac{20}{4\pi} = \frac{5}{\pi}$

$r^3 = \frac{5}{\pi} = r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$

$A''min = 4\pi + \frac{20(2r)}{r^4} = 4\pi + \frac{40}{r^3}$

$A''min = 4\pi + \frac{40}{\left(\frac{5}{\pi}\right)} = 4\pi + \frac{40\pi}{5}$

$A''min = 4\pi + 8\pi = 12\pi$

Existe un minimo para $r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}} = 1.17 m$

$h = \frac{10}{\pi r^2} = \frac{10}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\right)^2} = \frac{10}{\pi\left[\left(\frac{5}{\pi}\right)^{1/3}\right]^2} = \frac{10}{\pi\left(\frac{5}{\pi}\right)^{2/3}}$

$h = \frac{10}{4.28} = 2.33 m$

53.- Con el problema anterior considerando los datos, que dimensiones debaria tener el cilindro para que en su construccion lleve un costo minimo si se sabe que el material para su base y la tapa cuesta \$10 x m^2 y el material para la parte lateral cuesta \$14 x m^2.

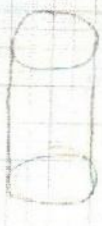
Area del cilindro $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$A\,min = 2\pi r(r+h)$

$V = 10000$ Lts

$1 m^3 = 1000$ Lts

$10000\ Lts \cdot \frac{1 m^3}{1000\ Lts} = 10 m^3$



$A\,min = 2\pi r\left(r + \frac{10}{\pi r^2}\right)$

$A\,min = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{10}{\pi r^2}\right)$

$A\,min = 4\pi r - \frac{20}{r^2}$

$A' = \frac{4\pi r}{1} - \frac{20}{r^2} = 0$ $\quad 4\pi r^3 = 20$

$A' = \frac{4\pi r^3 - 20}{r^2} = 0$ $\quad r^3 = \frac{20}{4\pi} = \frac{5}{\pi} = \sqrt[3]{5/\pi}$

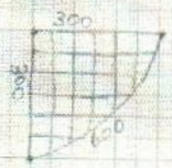
$A = 4\pi + \frac{20(2r)}{r^4}$

$A = 4\pi + \frac{40}{r^3}$

$A'' = 4\pi + \frac{40}{\frac{5}{\pi}} = A = 4\pi + \frac{40\pi}{5} = 4\pi + 8\pi = 12\pi$

$r = \sqrt[3]{5/\pi} = 1.17 m$ $\quad h = \frac{14}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}\right)^2} =$ $\quad h = \frac{14}{\pi\left[\left(\frac{5}{\pi}\right)^{1/3}\right]^2}$

5Ma.- Se tiene un terreno en forma de sector circular que deberá tener el perímetro de 1200 mts. ¿Cuál será el radio para obtener el área máxima?



Área del Sector

$\pi r^2 - 360°$

$A.S.C - \theta$

$A.S.C = \frac{\pi r^2 \theta}{360°}$

$A.S.C = \frac{\pi r^2 \theta}{360°}$

$A.S.C = \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi}$

$A.S.C = \frac{r^2 \theta}{2}$

Arco de circunferencia

$2\pi r - 360°$

$a - \theta$

$a = \frac{2\pi r \theta}{360°}$

$a = \frac{2\pi r \theta}{2\pi}$

$a = r\theta$

$1200 = 2r + a$

$1200 = 2r + r\theta$

$\frac{1200 - 2r}{r} = \theta$

$A.S.C = \frac{r^2 \theta}{2}$

$A.S.C = \frac{1200 - 2r}{2} = \frac{1200r - 2r^2}{2}$

$A.S.C = \frac{1200 - 4r}{2}$

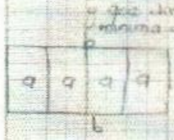
$A.S.C = 600 - 2r = 0$

$\frac{600}{2} = r$

$300 = r$

Existe un área máxima para $r = 300m$

5Jo.- Un terreno rectangular que tiene $25000\ m^2$ ha de ser cercado y dividido en 4 lotes por cercas paralelas a uno de los lados. ¿Qué dimensiones del terreno permitirán utilizar una cantidad mínima de cerca?



$A = ba$

$25000\ m^2 = ba$

$b = \frac{25000}{a}$

$f = [5a + 2(\frac{25000}{a})]$

$F = 5a + \frac{50000}{a}$

$\frac{5a^2 + 50000}{a} = \frac{a\frac{d}{dx}(5a^2 + 50000) - (5a^2 + 50000)\frac{d}{dx}(a)}{a^2}$

$\frac{a(10a) - (5a^2 + 50000)(1)}{a^2} = \frac{10a^2 - 5a^2 - 50000}{a^2} = \frac{5a^2 - 50000}{a^2}$

$\frac{5a^2 - 50000}{a^2} = 0 \qquad 5a^2 - 50000 = a^2(0)$

$5a^2 - 50000 = 5a^2 = 50000 = a^2 = \frac{50000}{5} = 10000$

$\sqrt{a^2} = \sqrt{10000} = a\ 100$

$\frac{5a^2 - 50000}{a^2} = \frac{(a^2)\frac{d}{dx}(5a^2 - 50000) - (5a^2 - 50000)\frac{d}{dx}(a^2)}{(a^2)^2}$

$= \frac{a^2(10a) - (5a^2 - 50000)(2a)}{a^4} = \frac{10a^3 - 10a^3 + 100000a}{a^4} = \frac{100000}{a^3} = \frac{100000}{100000} = 1 > 0$

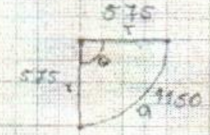
$x = 100$

$y = \frac{25000}{x} = \frac{25000}{100} = 250$

Existe una cantidad mínima de cerca con las dimensiones siguientes:

Largo = 250 m ancho = 100 m

569.-



$P = 2300\,m$

$P = r + r + a$

$P = 2r + a$

$A.S.C = \frac{r^2 \theta}{2}$

Area del Sector

$\pi r^2 - 360°$

$A.S.C - \theta$

$A.S.C = \frac{\pi r^2 \theta}{360°}$

$A.S.C = \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi}$

$A.S.C = \frac{r^2 \theta}{2}$

Arco de Circunf.

$2\pi r - 360°$

$a - \theta$

$a = \frac{2\pi r\, \theta}{360°}$

$a = \frac{2\pi r\, \theta}{2\pi}$

$a = r\theta$

$2300\,m = 2r + a$

$2300 = 2r + r\theta$

$\frac{2300 - 2r}{r} = \theta$

$A.S.C = \frac{r^2 \theta}{2}$

$A.S.C = r^2 \frac{(2300 - 2r)}{r} = \frac{2300r - 2r^2}{2}$

$A.S.C = 2300 - 4r^2$

$2300 - 4r = 0$

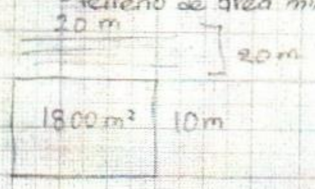
$2300 = 4r$

$\frac{2300}{4} = r$

$575 = r$

Existe un area maxima para $r = 575\,m$

570.- Se necesita tener $1800\,m^2$ de cultivo en un terreno rectangular al cual deberan dejarcele libres margenes superior e inferior de 20mts. y laterales espacios de 10mts. Encontrar las dimensiones del terreno de area minima.



$A = ab$

$1800\,m^2 = ab$

$b = \frac{1800}{a}$

$P = 8a + 1b$

$P = 8a + 5\,\frac{(18{,}000)}{a}$

$P = 8a + \frac{18000}{a}$

$P = \frac{8a}{1} - \frac{18000}{a^2}$

$P = \frac{8a^2 - 18000}{a^2} = 0$

$8a^2 - 18000 = 0$

$a^2 = \frac{18000}{a} = \sqrt{2{,}250}$

$\downarrow$

47.93

$P = \frac{8 - 18000}{a^2}$

$P' = \frac{18000\,(2a)}{a^2}$

$P' = \frac{18000(94.86)}{(47.43)^4}$

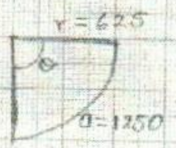
$P = 1707480$

$P'' = 0.33$

Se obtiene el area minima

58.- Se necesita fabricar un canalon de seccion rectangular doblando una lamina rectangular. Cual seria la capacidad maxima del canalon si su ancho es el doble de la profundidad.

59.-



$A.S.C = \frac{r^2 \theta}{2}$

$A.S.C = \frac{r^2 \left(\frac{a}{r}\right)}{2}$

$A.S.C = \frac{ar}{2}$

$A.S.C = \frac{(2500-2r)(r)}{2}$

$A.S.C = \frac{2500r - 2r^2}{2}$

$A' = \frac{2500 - 4r}{2}$

$2500 - 4r = 0$

$2500 = 4r$

$\frac{2500}{4} = r$

$725 = r$

$A'' = \frac{-4}{2} = -2$

$2\pi r = 360°$

$a = \theta$

$a = \frac{2\pi r \theta}{360°}$

$2\pi = 360°$

$a = \frac{2\pi r \theta}{2\pi}$

$a = r\theta$

$\frac{a}{r} = \theta$

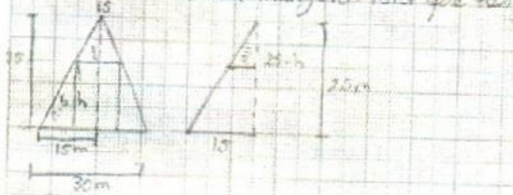
$P = 2r + a$

$2500 = 2r + a$

$2500 - 2r = a$

Existe un area maxima para el sector circular con un radio = 625m y a = 1250

60.- Dentro de un terreno de forma triangular (isosceles). Se desea hacer un silo que tenga el area maxima en forma de rectangulo se sabe que el terreno mide 30m de base 25m de altura que dimensiones debe tener el silo si uno de sus lados concide con la base del triangulo- Para que tenga maxima área.



$A = h \cdot L$

$A = h \dfrac{(375 - 15h)}{12.5}$

$A = \dfrac{375h - 15h^2}{12.5}$

$A' = \dfrac{375 - 30h}{12.5}$

$375 - 30h = 0$

$375 = 30h$

$\dfrac{375}{30} = h$

$12.5 = h$

$A'' = \dfrac{-30}{12.5} = -2.4$

$\dfrac{15}{\frac{L}{2}} = \dfrac{25}{25h}$

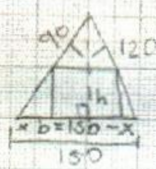
$15(25h) = 25\left(\frac{L}{2}\right)$

$375 - 15h = 12.5L$

$\dfrac{375 - 15h}{12.5} = L$

Existe un area maxima para el rectangulo de $h = 12.5m$ y $L = 15m$

62.- Un terreno tiene forma de triangulo rectangulo cuyos catetos miden 90m y 120m. Encontrar las dimensiones del edificio rectangular de mayor base que se pueda construir cuyo frente queda sobre la hipotenusa.



A del A (Ley Heron:

$A = \sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - L_1\right)\left(\frac{P}{2} - L_2\right)\left(\frac{P}{2} - L_3\right)}$

$A = \sqrt{86.05(90)(60)(30)}$

$90^2 + 120^2 = x^2$

$8{,}00 + 14{,}400 = x^2$

$\sqrt{22.500} = 150$ hipotenusa

63a.- Un lado de un terreno esta adyacente a un rio para los otros tres lados se dispone de 240m de cerca cuales son las dimensiones para un area maxima.

$A = xy$

$P = 240$
$240 = 2x + y$
$240 = 2x + y$

$A = xy$
$A = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2$

La 1ª derivada de $240x - 2x^2$

$240 - 4x = 0$
$-4x = -240$
$x = \frac{240}{4} = 60$

2ª derivada $240 - 4x = -4$

Existe un area maxima para el terreno de 120m de largo x 60m de ancho.

64.- Se necesita elaborar una caja de base cuadrada sin tapa q tiene una superficie total de $432 m^2$. Cuales son sus dimensiones para obtener un volumen maximo.

$A = b^2 + 4hb$
$432 = b^2 + 4hb$

$\frac{432 - b^2}{4b} = h$

$V = b^2 h$
$V = b^2 \frac{(432 - b^2)}{4b}$

$V = \frac{432b^2 - b^4}{4b} = \frac{432b - b^3}{4}$

1ª derivada de $\frac{432b - b^3}{4} = \frac{432 - 3b^2}{4}$

$432 - 3b^2 = 4(0)$
$432 - 3b^2$
$432 = 3b^2$
$\frac{432}{3} = b^2$
$144 = b^2$
$b = \sqrt{144}$
$b = 12$

2ª derivada de $\frac{432 - 3b^2}{4}$

$\frac{6b}{4} = -6\left(\frac{12}{4}\right) = \frac{-72}{4} = -18$

Existe un volumen maximo para la caja de base cuadrada 144 cm y una altura de 6cm

65.- Se quiere construir una sisterna de base cuadrada rectangular para poder satisfacer de agua a un criadero de borregos. diga que dimensiones debe tener para que su capacidad sea de 18 mil litros de agua y se utilice la menor cantidad de material en su construcción.

$18000 \cdot \frac{1m^3}{1000 l} = 18 m^3$

$18 = L^2 h$

$\frac{18}{L^2} = h$

$A_{min} = 2L^2 + 4hL$

$A_{min} = 2L^2 + 4(\frac{18}{L^2})(L)$

$A_{min} = 2L^2 + \frac{72}{L}$

$A_{min} = \frac{4L}{1} - \frac{72}{L^2}$

$A_{min} = \frac{4L^3 - 72}{L^2} = 0$

$4L^3 = 72$

$L^3 = \frac{72}{4}$

$L^3 = 18$

$L = 2.62$

Existe un area minima para la sisterna con $L = 2.62$.

$A_{min} = \frac{4L - 72(1)}{L^2}$

$\frac{4 + 72 \frac{d}{dx} L^2}{L^4}$

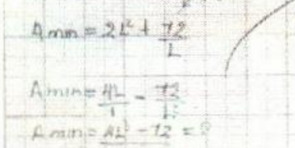
$\frac{4 + 72(2L)}{L^4}$

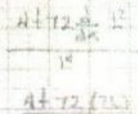
$\frac{4 + 144L}{L^3}$

$4 + \frac{144}{18}$

$4 + 8 = 12$

66.- Se desea construir en el dentro de un terreno en forma triangular con las medidas de los lados igual a 40 m, 60 m y 70 m, un granero cuya base sea un rectangulo que tenga area maxima. Cuales deben ser las dimensiones si la altura del terreno es de 35 m.





$40^2 = 35^2 + x^2$

$1600 - 1225 = x^2$

$19.36 = x$

$A = yz$

$A = y\frac{(681.1 - 19.46y)}{35}$

$A = \frac{681.1y - 19.46y^2}{35}$

$\frac{35 - y}{35} = \frac{z}{x}$

$\frac{35 - y}{35} = \frac{z}{19.46}$

$35z = 681.1 - 19.46y$

$z = \frac{681.1 - 19.46y}{35}$

67.- Una persona desea Cercar un Campo rectangular y luego dividirlo en 3 lotes mas pequeños que dimensiones le permitiran abarcar mayor area si su presupuesto le permite Comprar solo 1000 mts de material.

$A = ab$

$A = \frac{(1000-2b)}{4} b$

1ª derivada

$A = \frac{1000b - 2b^2}{4}$ $\frac{d}{dx}\frac{1000b-2b^2}{4} = \frac{1000-4b}{4} = 4(0)$

$1000 - 4b$

$b = \frac{1000}{4}$

$250 = b$

$1000 = 4a + 2b$

$\frac{1000-2b}{4} = a$

$\frac{1000-4b}{4}$ $a = 125$

$\frac{1000-2(250)}{4} = 125$

$A'' = \frac{-4}{4} = 1$

Existe un area maxima de cerca en las siguientes dimensiones largo 250m y ancho 125 m

68.- Un alambre de 500 mts de largo se va dividir en 2 partes a una de las partes se le dara la forma de una circunferencia y a la otra de un cuadrado. Como debe cortarse el alambre para que la suma de las areas del circulo y del cuadrado sea maximo.

$A = \pi r^2$ $A = l \cdot l$ Area total max

$500 - a$

$a = 2\pi r$ $500 - a = 4l$

$\frac{a}{2\pi} = r$ $\frac{500-a}{4} = l$

$A_{total} = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{500-a}{4}\right)^2$

1ª derivada

$\frac{a^2}{4\pi} + \frac{(500-a)}{16}$

$\frac{2a}{4\pi} + 2\frac{(500-a)}{16}$

$\frac{2a}{4\pi} + \frac{500-a}{8}$

$= \frac{16a + 2000\pi - 4a\pi}{32\pi} = 0$

$16a - 4a\pi = 2000\pi$

$16a - 4a = \frac{2000\pi}{\pi}$

$12a = 2000$

$a = \frac{2000}{12}$

$a = 166.7$

2ª derivada

$\frac{16a + 2000\pi - 4a\pi}{32\pi}$

$\frac{16 - 4\pi}{32\pi} = \frac{12}{32} = 0.375$

No hay manera de obtener un area maxima

69o- Un beterinario cuenta con 30 mts de tela del alambre y quiere construir 6 jaulas para perros, lebantando primero una cerca al rededor de una región rectangular y dividiendo luego la region en 6 rectangulos iguales ¿ cuales son las dimensiones de la zona rectangular para que el area total sea maxima.

$A = ab$

$A = a\left(\frac{30-7a}{2}\right)$

$P = 2(a+b)$

$P = 7a + 2b$

$30 = 7a + 2b$

$30 = 7a + b$

$\frac{30-7a}{2} = b$

$A' = \frac{30-7a^2}{2} \quad \frac{d}{dx} \frac{30-7a^2}{2} = \frac{30-14a}{2} = 2(0)$

$30-14a = 30 = 14a \quad \frac{30}{14} = a \quad 2.142 = a$

$A'' = \frac{-14}{2} = -7$

$P = 30-7(2.142) = \frac{30-14.994}{2} = \frac{15.006}{2} = 7.503\, b$

$P = 7(2.142) + 2(7.503) = 14.994 + 15.006$

$P = 30$

70o- El propietario de un huerto de manzanas, calcula que si siembra 24 arboles por acre, entonces cada arbol adulto dara 600 manzanas al año. por cada 3 arboles mas que se planten, por acre, el numero de manzanas que produce cada arbol disminuya el 12 al año ¿ Cuantos arboles se deben plantar por acre.

$A = Ab$

$A = \left[\frac{1000-2b}{4}\right]$

$1000 = 4a + 2b$

$\frac{1000-2b}{4} = a$

Primera derivada

$A = \frac{1000-2b^2}{4}$

$\frac{1000-4b}{4}$

$3x = \frac{1000b-2b^2}{4}$

$\frac{1000-2(250)}{4}$

$a = 125$

$\frac{1000-4b}{4} = 0$

$A'' = \frac{-4}{4} = -1$

$1000-4b = 0$

$-4b = 1000$

Existe un area maxima en la siguiente dimencion de largo 250 m y ancho 125 m

$b = \frac{1000}{4}$

$b = 250$

ANEXO B

Programa de estudios de Matemática I y Matemáticas II en la Facultad de Ciencias Agronómicas, Campus V, de la Universidad Autónoma de Chiapas, Villaflores, Chiapas

FACULTAD DE CIENCIAS AGRONÓMICAS COMPETENCIA BÁSICA: **COMUNICACIÓN** PROGRAMA DE LA UNIDAD ACADÉMICA: **MATEMÁTICAS I**	**DES:** FCA **Programa educativo:** Ingeniero Agrónomo **Tipo de unidad académica:** Básica **Clave de la unidad académica:** **Semestre:** I **Área de formación en plan de estudios:** Básica **Créditos:** 4 **Total de horas por semana:** 4 ➢ Teoría: 2 ➢ Taller: ➢ Laboratorio: ➢ Prácticas complementarias: 2 ➢ Trabajo extra-clase: 3 **Total de horas en el semestre:** 64 **Fecha última de actualización curricular:** Mayo de 2006 **Prerrequisito y clave:**

Propósitos de la unidad académica:
Al finalizar el proceso de formación el estudiante será capaz de aplicar los conocimientos de álgebra, geometría y trigonometría y resolver problemas agropecuarios.

Estrategia de formación:
Para asegurar el aprendizaje de los estudiantes, se determinará el grado de conocimiento de cada uno de ellos, mediante lluvia de ideas. Mediante la reflexión se rescatarán las experiencias de cada estudiante para promover la retroalimentación entre compañeros.

Técnicas didácticas
Aprendizaje en base a problemas
Expositiva
Corrillos
Lluvia de ideas
Construcción de material académico (apuntes)

Recursos y materiales didácticos:
Marcadores
Pintarrón
Material impreso
Calculadora
Software
Computadora
Proyector multimedia

EJES TEMÁTICOS	RESULTADOS DE APRENDIZAJES	EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES (Criterios y evidencias integradoras del desempeño)	TIEMPO (h)
I. Álgebra 1. Ecuaciones lineales 2. Ecuaciones simultáneas 3. Ecuaciones cuadráticas	Aplicarlo en la solución de problemas	Comprende y aplica las ecuaciones de lineales, con una y dos incógnitas. Comprende y aplica las ecuaciones cuadráticas.	12
II. Programación Lineal 1. Inecuaciones 2. Método gráfico y simplex	Aplicar el criterio de puntos críticos en la maximización de una función que representa un problema	Comprende y aplica las inecuaciones en la solución de problemas.	4
III. Trigonometría y Geometría 1. Funciones trigonométricas 2. Triángulos y polígonos regulares e irregulares	Comprender las funciones trigonométricas, así como el trazado de los triángulos y polígonos regulares	Comprende y aplica las funciones trigonométricas. Aplica el trazo de los triángulos y polígonos regulares e irregulares.	8
IV. Logaritmos 1. Ecuaciones logarítmicas 2. Transformación y graficación de variables	Comprender las funciones logarítmicas, así como transformar y graficar variables.	Comprende y aplica las ecuaciones logarítmicas. Transforma y grafica variables.	8

PROGRAMA DE PRÁCTICAS

No.	Nombre de la práctica	Eje temático	Tiempo (h)	Descripción (Propósito y necesidades)	Lugar de la práctica
1	Problemas de aplicación de álgebra en campo	I. Algebra	12	Para solución de problemas de aplicación de agronomía. Propósito: vincular la teoría con problemas reales de agronomía.	Rancho San Ramón y FCA
2	Problemas de aplicación de programación lineal en campo	II. Programación lineal	12	Para solución de problemas de aplicación de agronomía. Propósito: vincular la teoría con problemas reales de agronomía.	Rancho San Ramón y FCA.
3	Problemas de aplicación de trigonometría y geometría en campo	III. Trigonometría y geometría	8	Para solución de problemas de aplicación de agronomía. Propósito: vincular la teoría con problemas reales de agronomía.	Rancho San Ramón y FCA

EVALUACIÓN	%
Reconocimiento parcial uno	20
Reconocimiento parcial dos	20
Reconocimiento parcial tres	20
Reconocimiento parcial cuatro	20
Reconocimiento final: Se realizará una evaluación final escrita, poniendo énfasis en la resolución de problemas de los temas tratados y con ello corroborar el aprendizaje del estudiante.	20
	100

AVANCE PROGRAMÁTICO

Ejes temáticos / Prácticas	H o r a s	S E M A N A S															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I. Algebra	12	X	X	X													
Práctica 1. Problemas de aplicación de algebra en campo	12				X	X	X										
Reconocimiento parcial uno							X										
II. Programación lineal	4							X									
Práctica 2. Problemas de aplicación de programación lineal en campo	12								X	X	X						
Reconocimiento parcial dos											X						
III. Trigonometría y Geometría	8											X	X				
Práctica 3. Problemas de aplicación de trigonometría y geometría en campo	8													X	X		
Reconocimiento parcial tres															X		
IV. Logaritmos	8															X	X
Reconocimiento parcial cuatro																X	
Reconocimiento final																	X
Total de horas	64																

FUENTES DE INFORMACIÓN

Básicas:

1. Allard, R. 1965. Sistema Internacional de Medidas. Edit. LIMUSA. México. 64 pp.
2. Aranda García, P. 1988. Matemáticas II. Dirección de Bibliotecas y Publicaciones del Instituto Politécnico Nacional. México. 185 pp.
3. Ayres, P. Jr. 1970. Trigonometría Plana y Esférica. Edit. Mc Graw Hill. México. 203 pp.
4. Ayres, P. Jr. y R. E. Moyer. 1991. Trigonometría. 2ª. ed. Edit. Mc Graw Hill. México. 248 pp.
5. Baldor, J. A. 1967. Álgebra. Edit. Cultural Mexicana. México. 576 pp.
6. Baldor, J. A. 1992. Geometría Plana y del Espacio y Trigonometría. Edit. Cultural Mexicana. México. 423 pp.
7. Barnett, R. 1976. Álgebra Elemental Moderna. Mc Graw-Hill. México. 392 pp.
8. Barnett, R. 1991. Geometría Plana con Coordenadas. 2ª. ed. Edit. Mc Graw-Hill. México. 234 pp.
9. Batschelet. 1978. Matemáticas Básicas para Biocientíficos. DO SSAT. Madrid. 645 pp.

Complementarias:

1. Garza O., B. 1990. Matemáticas I. Dirección General de Educación Tecnológica Industrial. Secretaría de Educación Pública. México. 435 pp.
2. Rees, P. K. y F. W. Sparks. 1994. Álgebra. 4ª. ed. Edit. Reverté Ediciones S. A. de C. V. México. 447 pp.
3. Spitzbart, A. y R. H. Bardell. 1983. Álgebra y Trigonometría. Edit. CECSA. México. 489 pp.

FACULTAD DE CIENCIAS AGRONÓMICAS COMPETENCIA BÁSICA: **COMUNICACIÓN** PROGRAMA DE LA UNIDAD ACADÉMICA: **MATEMÁTICAS II**	**DES:** FCA **Programa educativo:** Ingeniero Agrónomo **Tipo de unidad académica:** Básica **Clave de la unidad académica:** **Semestre:** II **Área de formación en plan de estudios:** Básica **Créditos:** 4 **Total de horas por semana:** 4 ➢ Teoría: 2 ➢ Taller: ➢ Laboratorio: ➢ Prácticas complementarias: 2 ➢ Trabajo extra-clase: 3 **Total de horas en el semestre:** 64 **Fecha última de actualización curricular:** Mayo de 2006 **Prerrequisito y clave:** Matemáticas I

Propósitos de la unidad académica:
Al finalizar el proceso de formación el estudiante será capaz de aplicar los conocimientos de la teoría de funciones, cálculo diferencial e integral, para dar soluciones a los problemas agropecuarios

Estrategia de formación:
Para asegurar el aprendizaje de los estudiantes, se determinara el grado de conocimientos de cada uno de ellos, con respecto a los temas, mediante lluvia de ideas. Se formarán equipos de trabajo procurando que queden juntos aquellos estudiantes que mas dominan el tema con aquellos que no lo hacen. Mediante la reflexión se rescatarán las experiencias de cada estudiante para promover la retroalimentación entre compañeros

Técnicas didácticas:
Lluvia de ideas
Expositiva
Corrillos
Aprendizaje en base a problemas

Recursos y materiales didácticos:
Marcadores
Pintarrón
Material impreso
Computadora
Software
Proyector multimedia

EJES TEMÁTICOS	RESULTADOS DE APRENDIZAJES	EVALUACIÓN DE LOS APRENDIZAJES (Criterios y evidencias integradoras del desempeño)	TIEMPO (h)
I. Cálculo diferencial 1. Derivación de funciones algebraicas 2. Problemas de aplicación de máximos y mínimos	Aplicar cálculo diferencial en el campo de la agronomía.	Desarrolla derivadas. Aplica la derivación en la solución de problemas máximos y mínimos.	16
II. Cálculo integral 2. Integración y cálculo de áreas planas por integración	Desarrollar funciones de integración para determinar el área bajo esa función.	Integra funciones Calcula áreas planas a través de la integración.	16

PROGRAMA DE PRÁCTICAS					
No.	**Nombre de la práctica**	**Eje temático**	**Tiempo (h)**	**Descripción (Propósito, necesidades)**	**Lugar de la práctica**
1.	Problemas de aplicación de cálculo diferencial en el campo	I. Cálculo diferencial	16	Para solucionar problemas de aplicación de agronomía Propósito: vincular la teoría con problemas reales de agronomía	FCA Rancho San Ramón
2.	Problemas de aplicación de cálculo integral en el campo	II. Cálculo integral	16	Para solucionar problemas de aplicación de agronomía Propósito: vincular la teoría con problemas reales de agronomía	FCA Rancho San Ramón

EVALUACIÓN	%
Reconocimiento parcial uno	40
Reconocimiento parcial dos	40
Reconocimiento final: Se realizará una evaluación final escrita y en campo, poniendo énfasis en los diseños utilizados con más frecuencia en experimentación agrícola y con ello corroborar el aprendizaje del estudiante y de esta manera facilitar la generación del conocimiento.	20
	100

AVANCE PROGRAMÁTICO

Ejes temáticos / Prácticas	Horas	SEMANAS															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I. Calculo diferencial	16	X	X	X	X												
Práctica 1. Problemas de aplicación de cálculo diferencial en el campo	16					X	X	X	X								
Reconocimiento parcial uno									X								
II. Cálculo Integral	16									X	X	X	X				
Práctica 2. Problemas de aplicación de cálculo integral en el campo	16													X	X	X	X
Reconocimiento parcial dos																X	
Reconocimiento final																	X
Total de horas	64																

FUENTES DE INFORMACIÓN

Básicas:

1. Ayres, P. Jr. 1971. Cálculo Diferencial e Integral. Edit. Mc. Graw Hill. México. 345 pp.
2. Bers, L. y F. Karal. 1978. Cálculo. Edit. Interamericana. México. 746 pp.
3. Flores G., C. 1985. Derivación de funciones algebraicas. Edit. TRILLAS. México. 101 pp.
4. Garza O., B. 1997. Geometría Analítica. Dirección General de Educación Tecnológica Industrial. Secretaría de Educación Pública. México. 468 pp.
5. Granville, W. A. 1985. Cálculo Diferencial e Integral. Edit. LIMUSA. México. 686 pp.
6. Haser, N. B., J. P. Lasalle y J. A. Sullivan. 1975. Análisis Matemático. Volumen I y II. Edit. Trillas. México. 808 pp.
7. Kindle, H. J. 1991. Geometría Analítica. Edit. México. 150 pp.
8. Lehmann, C. H. 1982. Geometría Analítica. Edit. LIMUSA. México. 494 pp.

Complementarias:

1. Zill, D. 1990. Cálculo Diferencial e Integral. Edit Trillas, S. A. México. 98 pp.
2. Swokoski, E. 1998. Cálculo Diferencial e Integral. Edit. Limusa. México. 200 pp.

ANEXO C

Entrevistas a estudiantes y profesores de matemáticas de la Facultad de Ciencias Agronómicas de la Universidad Autónoma de Chiapas, Campus V, Villaflores, Chiapas.

ENCUESTA A PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS AGRONÓMICAS, CAMPUS, V, DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS, UBICADA EN EL MUNICIPIO DE VILLA FLORES, CHIAPAS.

Nombre del profesor Oscar Noé Morales Orozco Fecha Agosto 29, 2009

Profesión Ing. Topógrafo y Fotogrametrista Años de experiencia 5

Entrevisto ____________________

1. ¿Participó usted en la elaboración de los programas de estudio de Matemáticas I y II vigentes en el actual plan de estudios? No ¿Cuál fue su participación? ____________________

MATEMÁTICAS I

2. ¿Ha usted impartido Matemáticas I? Sí ¿desde hace cuántos semestres? dos

3. ¿Ha usted realizado prácticas aplicadas al área de agronomía en los temas de ecuaciones algebraicas, inecuaciones y geometría y trigonometría en el Rancho San Ramón? No Describa las prácticas realizadas. Se realizó practica en la Facultad, en el campo de futbol. Las prácticas comprenden principalmente a área de polígono, calculo de ángulos interiores y ext., así como tambien el del triángulo (se empieza con éste ultimo).

4. ¿De los siguientes materiales didácticos cuáles utiliza en sus clases?. Marque con una palomita (√) los que utiliza.

Pintarrón	√
Marcadores	√
Material impreso	√
Calculadora	√
Software	—
Computadora	√
Proyector multimedia	√

Otros, especifique: Cinta métrica, hilo o mecate, varillas, martillo

Oscar Noé Morales Orozco

5. Para alcanzar los objetivos del programa y sobre todo relacionado con las prácticas de aplicación al área de agronomía, ¿cuál o cuáles considera usted que son los principales

obstáculos con los que se ha tenido que enfrentar? Transporte del aula de clases al rancho San Ramón: no existe, aún cuando se especifique (en el programa) que las prácticas debe ser allí.

6. ¿Qué propone usted para superar dichos obstáculos? Organización predemitada para elaborar dichas prácticas (como lo marca el programa) con la Dirección de la escuela.

MATEMÁTICAS II

7. ¿Ha usted impartido Matemáticas II Sí ¿desde hace cuántos semestres? Seis (se impartió 3 semestres)

8. ¿Ha usted realizado prácticas aplicadas a la agronomía, en cálculo diferencial e integral en el rancho San Ramón? No Describa las prácticas realizadas

9. ¿De los siguientes materiales didácticos cuáles utiliza en sus clases?. Marque con una palomita (√) los que utiliza.

Pintarrón	√
Marcadores	√
Material impreso	√
Calculadora	√
Software	
Computadora	
Proyector multimedia	

10. Para alcanzar los objetivos del programa y sobre todo los de aplicación agronómica, ¿cuál o cuáles considera usted que son los principales obstáculos con los que se ha tenido que enfrentar? El nivel académico de la mayoría de los alumnos ~~del~~ que traen desde el nivel medio superior; sobre todo en el tema de algebra.

11. ¿Qué propone usted para superar dichos obstáculos? Que en matemáticas 1, se proporcione un repaso general de aritmética y algebra

Óscar Noé Morales Orozco

ENCUESTA A PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS AGRONÓMICAS, CAMPUS, V, DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS, UBICADA EN EL MUNICIPIO DE VILLA FLORES, CHIAPAS.

Nombre del profesor Luis Alberto Besares C. Fecha 10-09-09

Profesión Ing. Agrónomo Años de experiencia 25

Firma

1. ¿Participó usted en la elaboración de los programas de estudio de Matemáticas I y II vigentes en el actual plan de estudios? Sí ¿Cuál fue su participación? estructurar contenidos, propositos, tiempos.

   ¿quienes más participaron? —

MATEMÁTICAS I

2. ¿Ha usted impartido Matemáticas I? Sí ¿desde hace cuántos semestres? 5

3. ¿Ha usted realizado prácticas aplicadas al área de agronomía en los temas de ecuaciones algebraicas, inecuaciones y geometría y trigonometría en el Rancho San Ramón o en cualquier otro lugar? Sí Describa las prácticas realizadas. Cálculo de Areas, de Volumenes, de alturas, de mezclas. con materiales que traen los muchachos.

4. ¿De los siguientes materiales didácticos cuáles utiliza en sus clases?. Marque con una palomita (√) los que utiliza.

   Pintarrón √
   Marcadores √
   Material impreso √
   Calculadora √
   Software √
   Computadora √
   Proyector multimedia √
   Otros, especifique: Calculadoras programables, Libros, apuntes.

5. Para alcanzar los objetivos del programa y sobre todo relacionado con las prácticas de aplicación al área de agronomía, ¿cuál o cuáles considera usted que son los principales

obstáculos con los que se ha tenido que enfrentar? Con la apreciación que tienen los alumnos sobre las matemáticas aplicadas a la agronomía que no la sienten como parte importante.

6. ¿Qué propone usted para superar dichos obstáculos? - Que al ingreso de los alumnos solo les permitan a aquellos que vengan de la especialidad de quim-biologos ó afines.

MATEMÁTICAS II

7. ¿Ha usted impartido Matemáticas II Sí ¿desde hace cuántos semestres? 4

8. ¿Ha usted realizado prácticas aplicadas a la agronomía, en cálculo diferencial e integral en el rancho San Ramón? Sí Describa las prácticas realizadas MAX y MIN de medidas en la escuela en terrenos pequeños, también para el cálculo de maximación de volumenes con mínimo de costos con materiales que traen los muchachos entre otros
Aquí en la escuela

9. ¿De los siguientes materiales didácticos cuáles utiliza en sus clases?. Marque con una palomita (√) los que utiliza.

Pintarrón	√
Marcadores	√
Material impreso	√
Calculadora	√
Software	√
Computadora	√
Proyector multimedia	√

10. Para alcanzar los objetivos del programa y sobre todo los de aplicación agronómica, ¿cuál o cuáles considera usted que son los principales obstáculos con los que se ha tenido que enfrentar? lo mismo que la pregunta 5

11. ¿Qué propone usted para superar dichos obstáculos? lo mismo que la pregunta 6

ENCUESTA A ESTUDIANTES DE LA UNACH, CAMPUS V, QUE HAN CURSADO LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS I Y II.

MATEMÁTICAS I

Nombre Ruben Vilchis Lara semestre actual 5

Profesor que impartió el curso Luis Alberto Besares Coutiño

1.-¿ El profesor dio a conocer el programa de estudios de Matemática I? SI

2.- Mencione las prácticas agronómicas que realizaron relacionadas con el contenido de matemáticas I en el rancho San Ramón o en cualquier otro rancho. NINGUNO

Realisamos algunos ejemplos Solo en el Aula.

3.- Si realizaron dichas prácticas, ¿qué opinión le merecen?

MATEMÁTICAS II

Nombre Rubén Vilchis lara semestre actual 5

Profesor que impartió el curso Oscar Nos Morales Orosco

1.-¿ El profesor dio a conocer el programa de estudios de Matemática II? NO

2.- Mencione las prácticas agronómicas que realizaron relacionadas con el contenido de matemáticas II en el rancho San Ramón o en cualquier otro rancho.

NINGUNA

3.- Si realizaron dichas prácticas, ¿qué opinión le merecen?

ENCUESTA A ESTUDIANTES DE LA UNACH, CAMPUS V, QUE HAN CURSADO LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS I Y II.

MATEMÁTICAS I

Nombre Daniel Vilchis Lara semestre actual 5°

Profesor que impartió el curso Luis Alberto Bezares Coutiño

1.-¿ El profesor dio a conocer el programa de estudios de Matemática I? Si

2.- Mencione las prácticas agronómicas que realizaron relacionadas con el contenido de matemáticas I en el rancho San Ramón o en cualquier otro rancho.

No, solo se realizaron algunos ejemplos que se relacionaban a la agronomia

3.- Si realizaron dichas prácticas, ¿qué opinión le merecen?

MATEMÁTICAS II

Nombre Daniel Vilchis Lara semestre actual 5°

Profesor que impartió el curso Oscar Noe Morales Orozco

1.-¿ El profesor dio a conocer el programa de estudios de Matemática II? No

2.- Mencione las prácticas agronómicas que realizaron relacionadas con el contenido de matemáticas II en el rancho San Ramon o en cualquier otro rancho.

No se realizaron ninguna

3.- Si realizaron dichas prácticas, ¿qué opinión le merecen?

ENCUESTA A ESTUDIANTES DE LA UNACH, CAMPUS V, QUE HAN CURSADO LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS I Y II.

MATEMÁTICAS I

Nombre Judith Anel Genovez Rincón semestre actual 7
L060030

Profesor que impartió el curso Luis Alberto Bezares C.

1.-¿ El profesor dio a conocer el programa de estudios de Matemática I? NO

2.- Mencione las prácticas agronómicas que realizaron relacionadas con el contenido de matemáticas I en el rancho San Ramón o en cualquier otro rancho. NO

3.- Si realizaron dichas prácticas, ¿qué opinión le merecen?

MATEMÁTICAS II

Nombre Judith Anel Genovez R. semestre actual 7

Profesor que impartió el curso Julian

1.-¿ El profesor dio a conocer el programa de estudios de Matemática II? Si

2.- Mencione las prácticas agronómicas que realizaron relacionadas con el contenido de matemáticas II en el rancho San Ramón o en cualquier otro rancho. NO

3.- Si realizaron dichas prácticas, ¿qué opinión le merecen?

ENCUESTA A ESTUDIANTES DE LA UNACH, CAMPUS V, QUE HAN CURSADO LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS I Y II.

MATEMÁTICAS I

Nombre Luis Rodrigo Cigarroa Grajales semestre actual 2 "A"

Profesor que impartió el curso Oscar Noe Morales Orozco

1.-¿ El profesor dio a conocer el programa de estudios de Matemática I? Si

2.- Mencione las prácticas agronómicas que realizaron relacionadas con el contenido de matemáticas I en el rancho San Ramón o en cualquier otro rancho. No se llevo acabo ni una practica, solo ejercicio en el salon. que solo era para matar el tiempo.

3.- Si realizaron dichas prácticas, ¿qué opinión le merecen? si tiene relación con la agronomia.

MATEMÁTICAS II

Nombre __________ semestre actual __________

Profesor que impartió el curso __________

1.-¿ El profesor dio a conocer el programa de estudios de Matemática II?_____

2.- Mencione las prácticas agronómicas que realizaron relacionadas con el contenido de matemáticas II en el rancho San Ramón o en cualquier otro rancho.

3.- Si realizaron dichas prácticas, ¿qué opinión le merecen?

Anexo D

Encuesta aplicada a campesinos del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villaflores, Chiapas sobre sus creencias (se encuentran video grabadas en disco DVD)

ENCUESTA: INFLUENCIA LUNAR SOBRE LOS CULTIVOS Y GANADO A DIFERENTES CAMPESINOS DE LA REGIÓN FRAILESCA

Lugar: ______________________________

Nombre: ______________________________ Edad años: ______

Fecha: ______________ Entrevistó: ______________________________

1. ¿Cree usted que la Luna tiene alguna influencia sobre los cultivos? ______________
   Explique ______________________________

2. ¿Toma en cuenta la fase en que se encuentra la Luna para realizar la siembra? ________
   Explique ______________________________

3. Mencione en que otras labores de cultivo toma en cuenta a la Luna para realizar sus actividades: ______________________________

4. ¿Para la cosecha que fases lunares prefiere y porqué? ______________________________

5. ¿Cómo aprendió usted los efectos que la luna tiene sobre sus cultivos?
   ____

6. En el corte de madera o postes, ¿usted cree que influye la Luna en la duración de esta?

7. ¿Cree usted que la Luna influye sobre los cambios del tiempo?__________
¿cómo?

8. En la época de lluvias, ¿cree usted que la Luna influye sobre que llueva o no? __________
¿Cómo?

9. ¿En qué otras actividades cree usted que afecte la Luna?

La encuesta anterior se aplicó y video grabó a productores agropecuarios del Ejido La Libertad Melchor Ocampo, municipio de Villa Flores, Chiapas, México, de ellas a continuación se hace una síntesis de las respuestas que los entrevistados proporcionaron.

Respecto a las primeras cuatro interrogantes, todos los entrevistados de más de 60 años de edad creen que la Luna tiene influencia sobre sus cultivos y coinciden que la siembra de ellos debe realizarse en Luna maciza (del Cuarto Creciente hasta tres días antes del novilunio), lo anterior tendrá dos efectos benéficos: mayor producción de las cosechas puesto que en el caso de los granos como el maíz y el frijol llenarán mejor (granos más grandes y mazorcas o vainas mejor granadas) y tendrán mayor durabilidad al almacenarse, puesto que se apolillan menos. La cosecha aunque también recomiendan realizarla en luna maciza consideran que influye menos puesto que el grano ya está formado. Para el caso de hortalizas las recomendaciones son las mismas. En cambio las personas más jóvenes no creen que la Luna tenga alguna influencia sobre los cultivos y ellos normalmente siembran cuando las condiciones de humedad sean las adecuadas sin fijarse en la Luna.

Todos los entrevistados que creen en la influencia lunar sobre los cultivos, sus creencias la heredaron de sus ancestros, quienes enseñaban a través del ejemplo, es decir, les decían que había que sembrar y cosechar en luna maciza y así lo realizaban. En cambio los más jóvenes han sido influenciados por agrónomos que normalmente no creen en la influencia lunar y les han dicho que siembren cuando las condiciones climáticas sean las adecuadas.

Las personas mayores también manifestaron que la Luna influye sobre la durabilidad de la madera, dependiendo de que se corte en luna tierna o en luna maciza, recomendando cortarla en esta última para que tenga mayor durabilidad, además manifestaron que los árboles tienen mayor savia en sus tallos en luna tierna, puesto que al cortarlo han observado que brota mayor cantidad del vital líquido que cuando el corte se realiza en luna maciza. Las personas más jóvenes manifestaron no creer en la influencia lunar en la durabilidad de la madera.

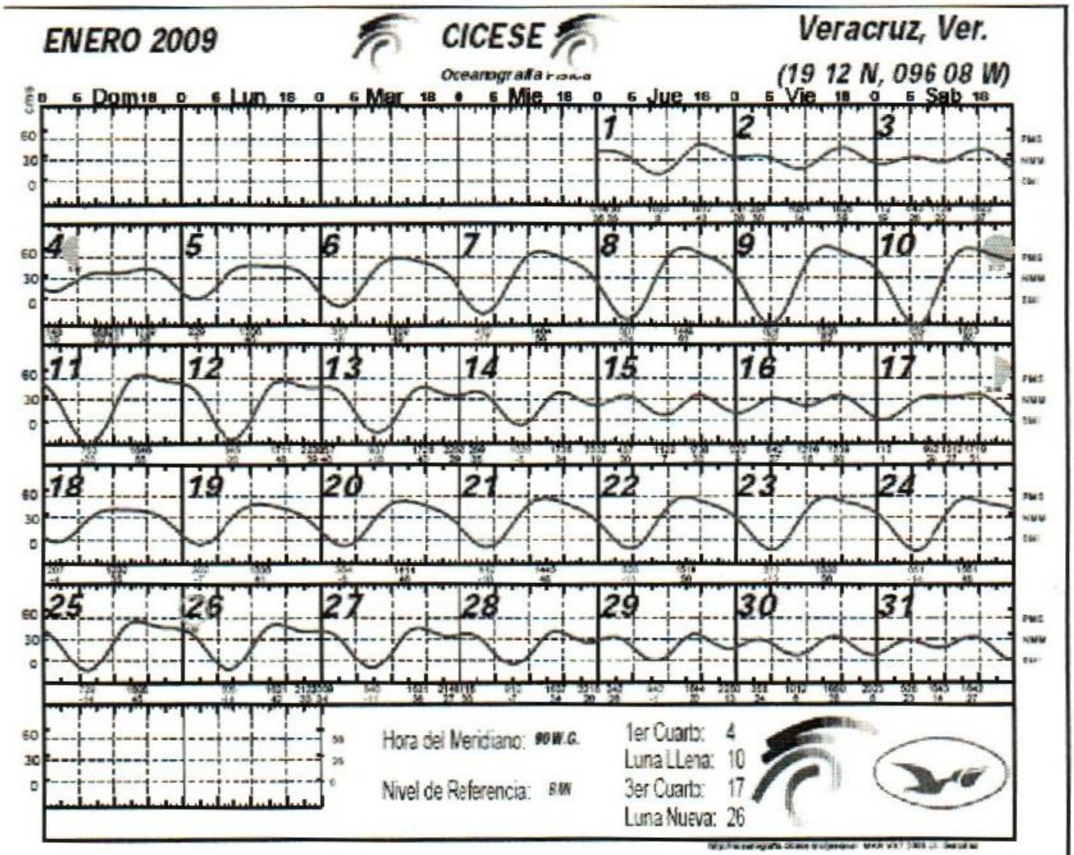
Respecto a la relación entre las fases lunares y las lluvias, las personas de mayor edad aseguran que en la época de lluvias se da una relación directa entre fases lunares y precipitaciones pluviales, ya que al pasar de una fase a otra normalmente suceden las lluvias. Uno de los entrevistados manifestó que en los meses de lluvia hay que fijarse en la posición que trae la Luna cuando aparece en los primeros días al atardecer, si viene canteada trae agua, de lo contrario trae viento. Las personas más jóvenes aunque no saben porque, aceptan que los viejecitos son los que saben más de eso y consideran que la relación entre las fases lunares y las lluvias es algo cierto.

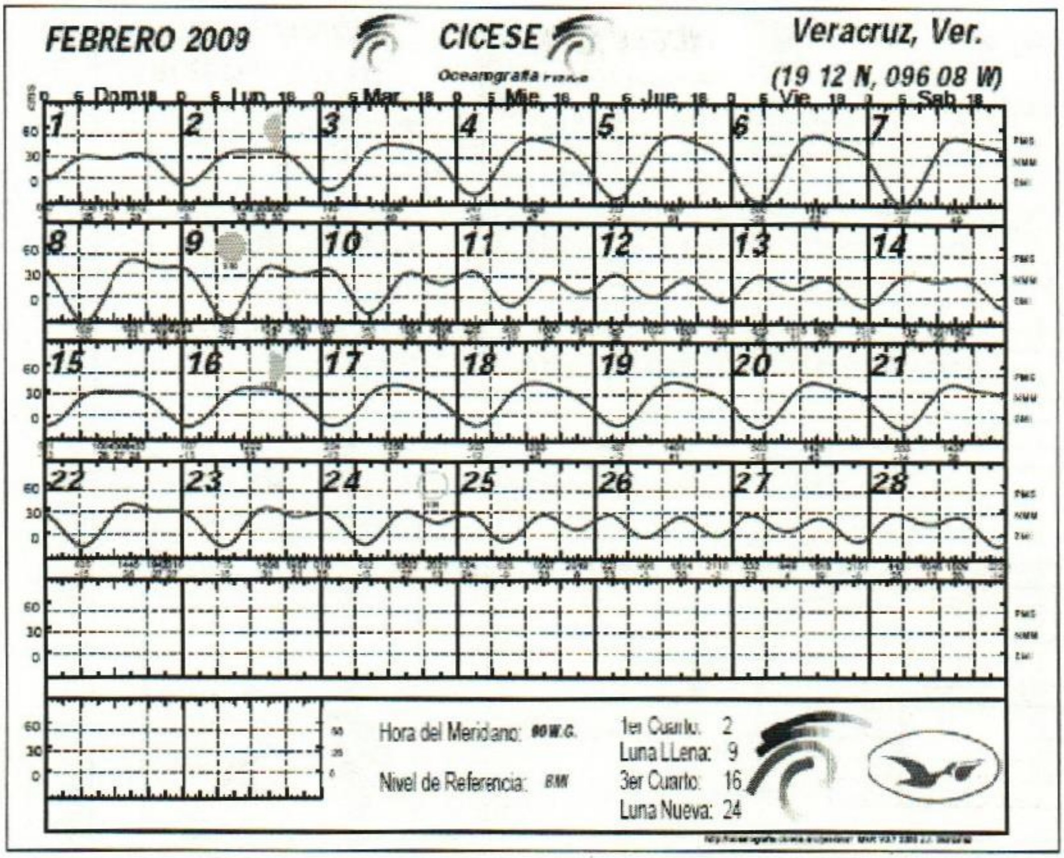
Otra de las actividades que relacionan los campesinos del ejido mencionado, tanto jóvenes como de la tercera edad, es la parición de sus ganados y el estado de la cría al nacer dependiendo de si la luna está maciza o tierna, ellos aseguran que las crías nacidas en luna maciza son más fuertes y por tanto caminan más rápido y son menos enfermizos que los nacidos en luna tierna.

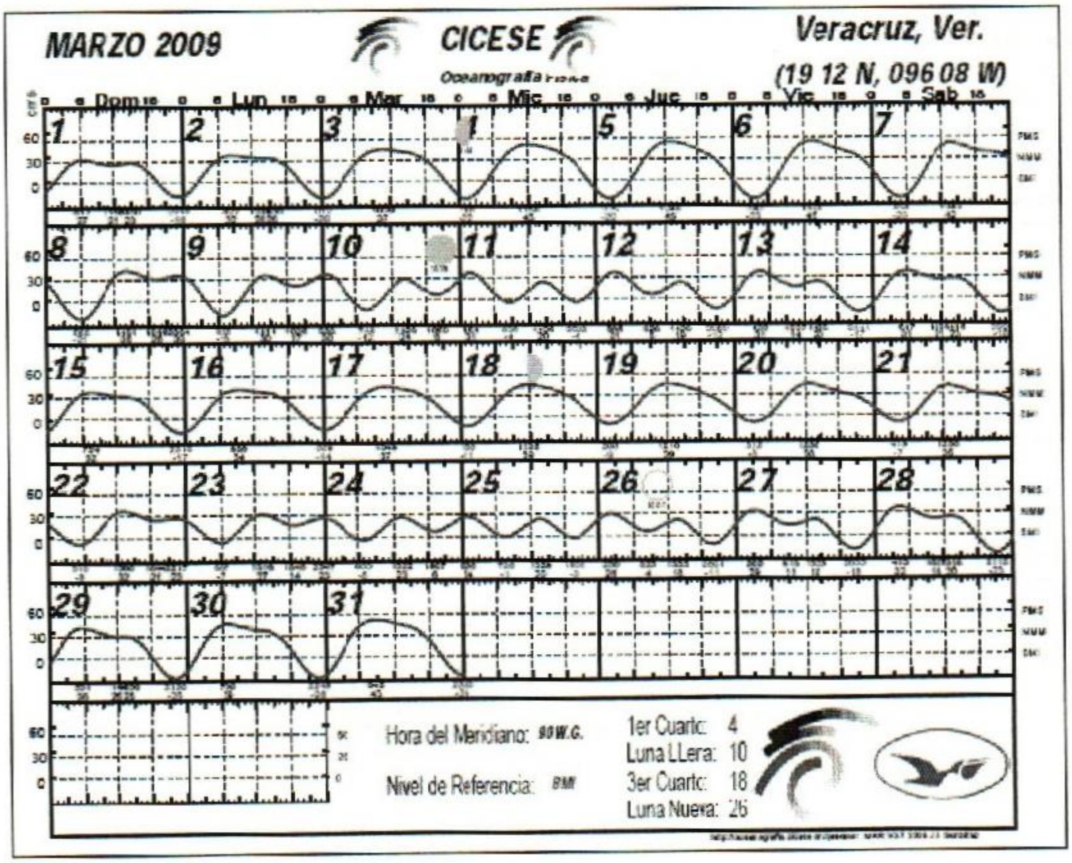
Uno de los entrevistados manifestó que sus padres y abuelos platicaban que hasta para tener relaciones sexuales con sus parejas tomaban en cuenta el estado de la Luna y lo hacían preferentemente en luna maciza, ahora eso se ha perdido.

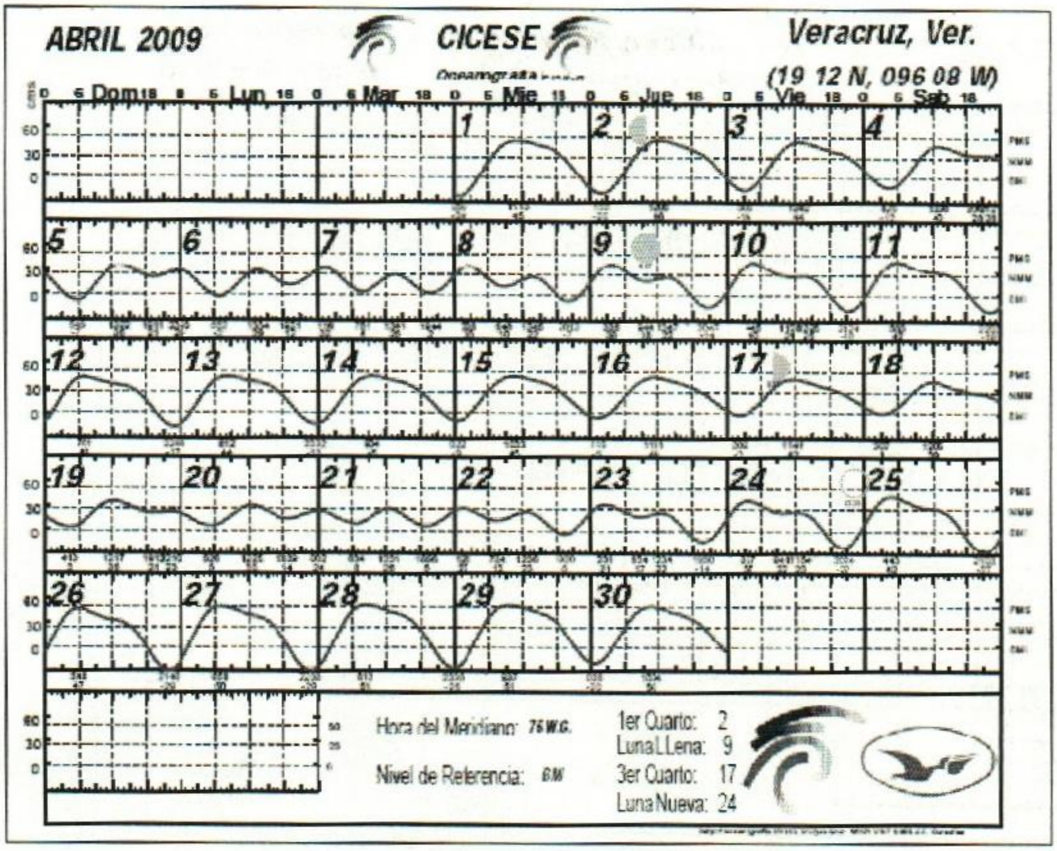
Anexo E

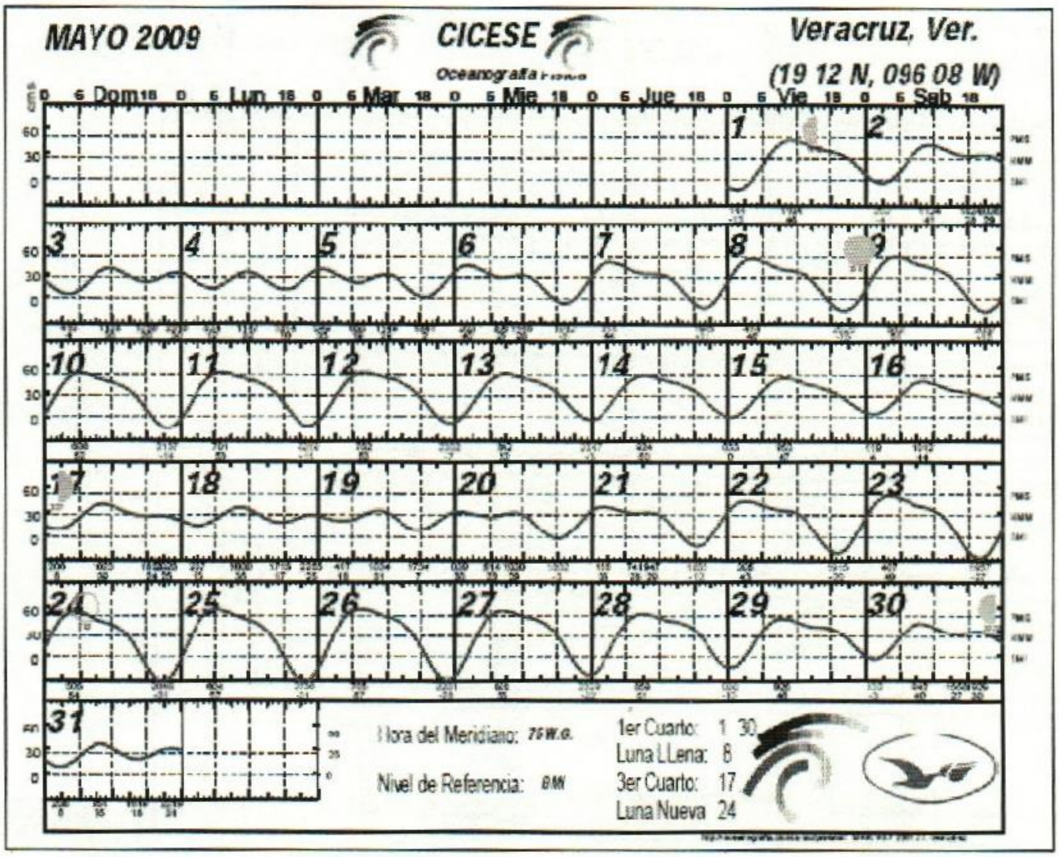
Tablas de mareas oceánicas en el Puerto de Veracruz, Veracruz, para el año 2009 que muestran una sola marea alta y una baja en un tiempo aproximado de 24 horas con 49 minutos. Fuente CICESE

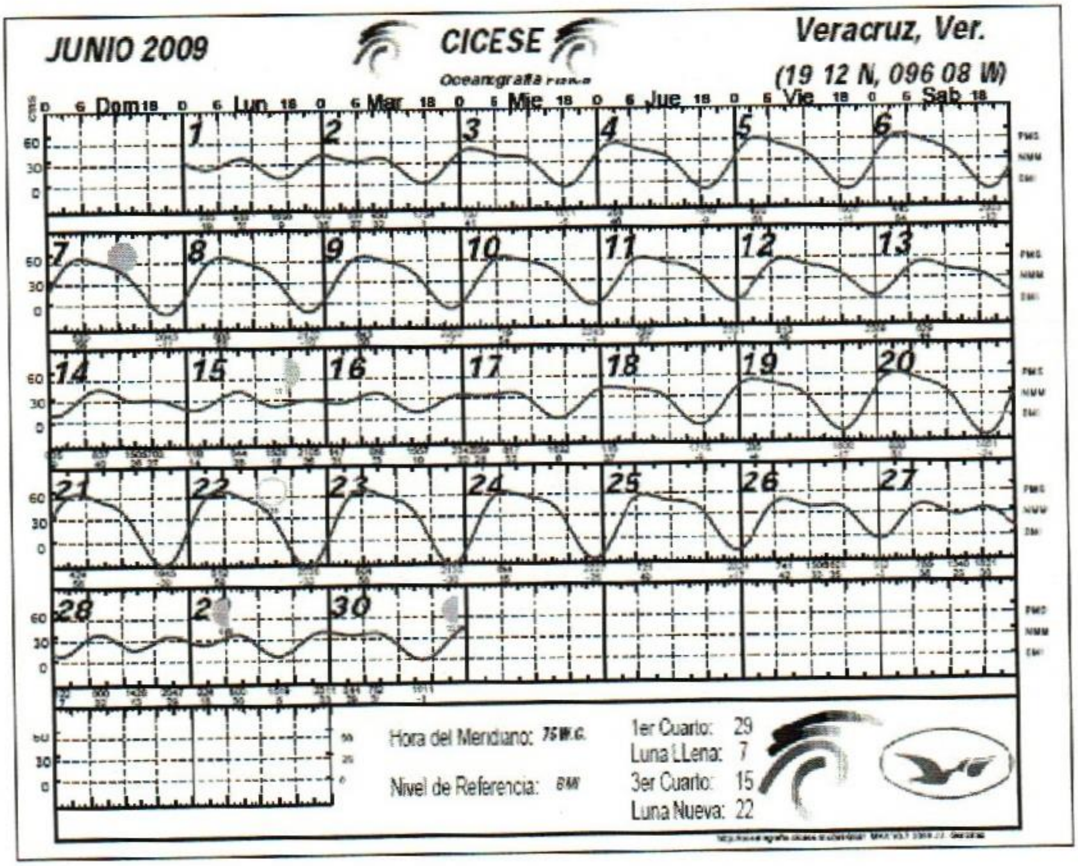

ENERO 2009
CICESE
Oceanografía Física
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Dom
Lun
Mar
Mie
Jue
Vie
Sab
Hora del Meridiano: 90 W.G.
Nivel de Referencia: BM
1er Cuarto: 4
Luna LLena: 10
3er Cuarto: 17
Luna Nueva: 26

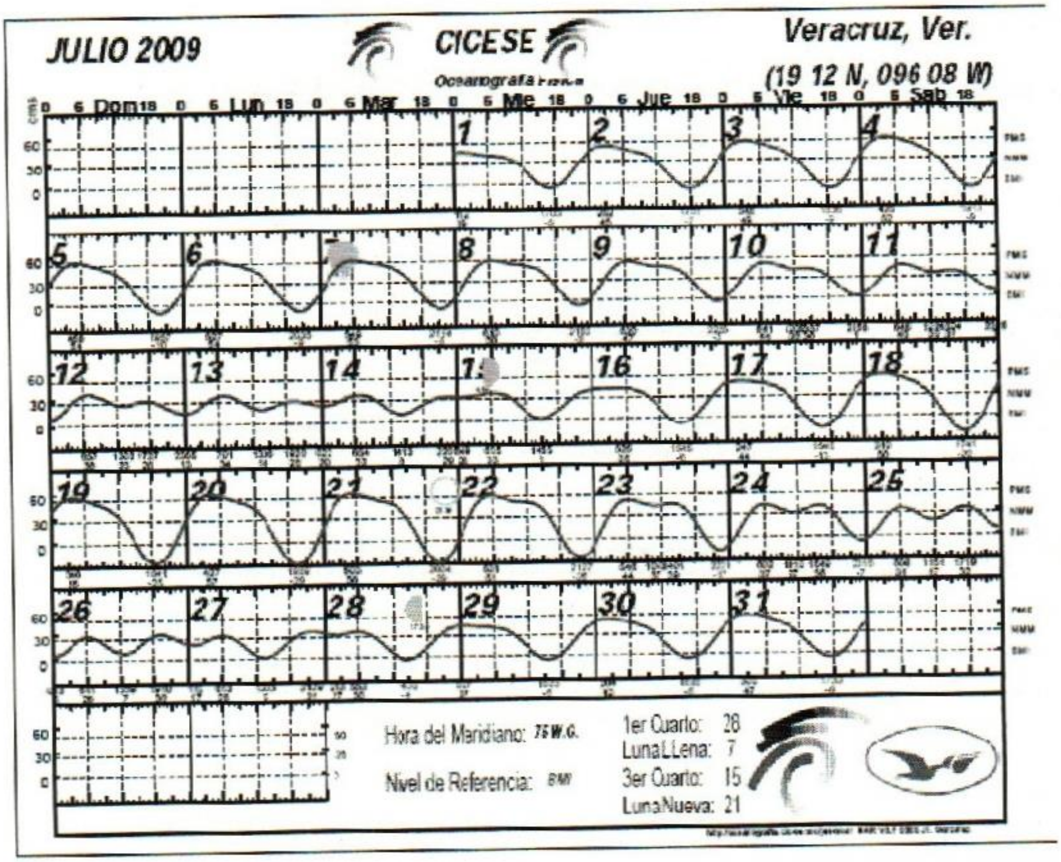

FEBRERO 2009
CICESE
Oceanografía Física
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Dom
Lun
Mar
Mie
Jue
Vie
Sab
Hora del Meridiano: 90W.G.
Nivel de Referencia: BMI
1er Cuarto: 2
Luna LLena: 9
3er Cuarto: 16
Luna Nueva: 24

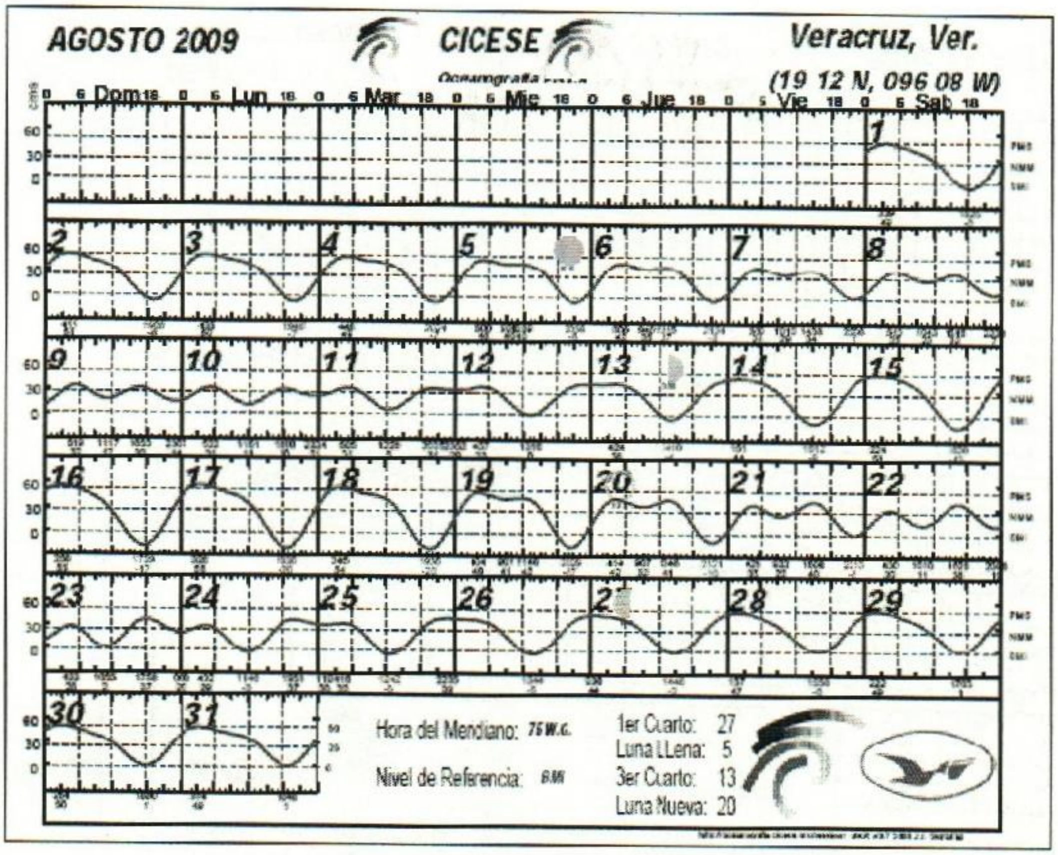

MARZO 2009
CICESE
Oceanografía Física
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Dom
Lun
Mar
Mie
Jue
Vie
Sab
Hora del Meridiano: 90W.G.
Nivel de Referencia: BMI
1er Cuarto: 4
Luna Llena: 10
3er Cuarto: 18
Luna Nueva: 26

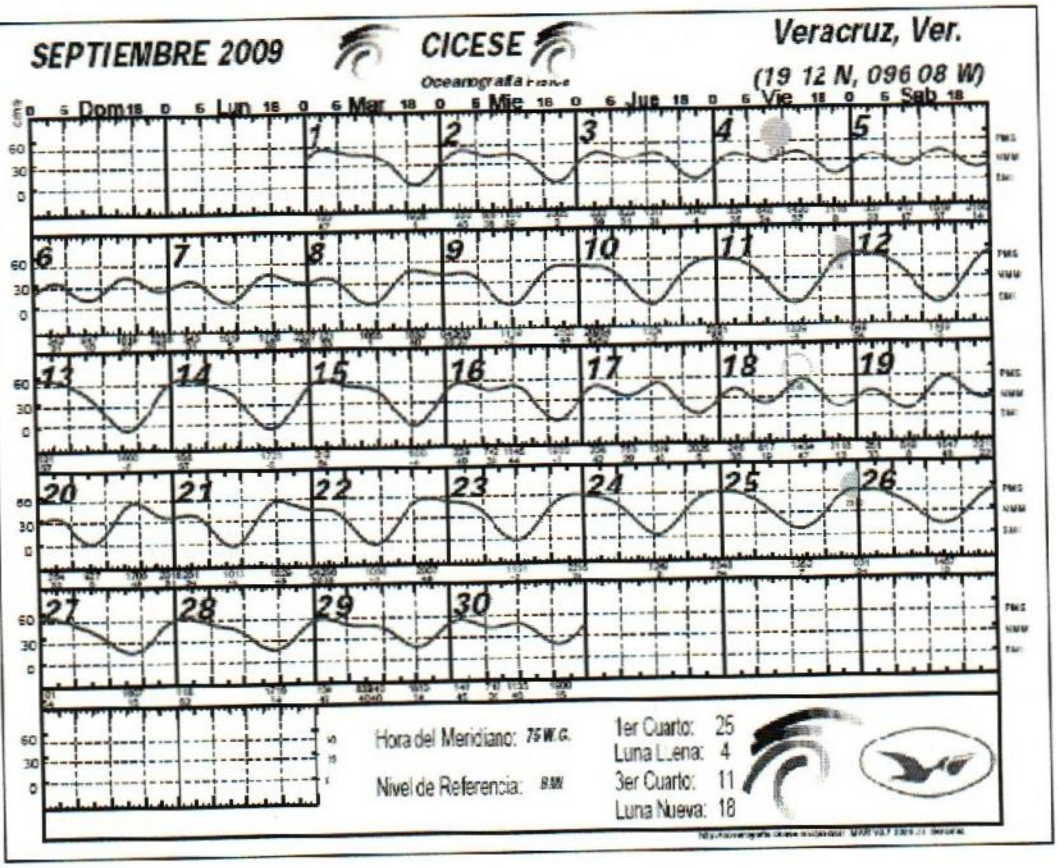

ABRIL 2009
CICESE
Oceanografía Física
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Hora del Meridiano: 75 W.G.
Nivel de Referencia: BM
1er Cuarto: 2
Luna LLena: 9
3er Cuarto: 17
Luna Nueva: 24

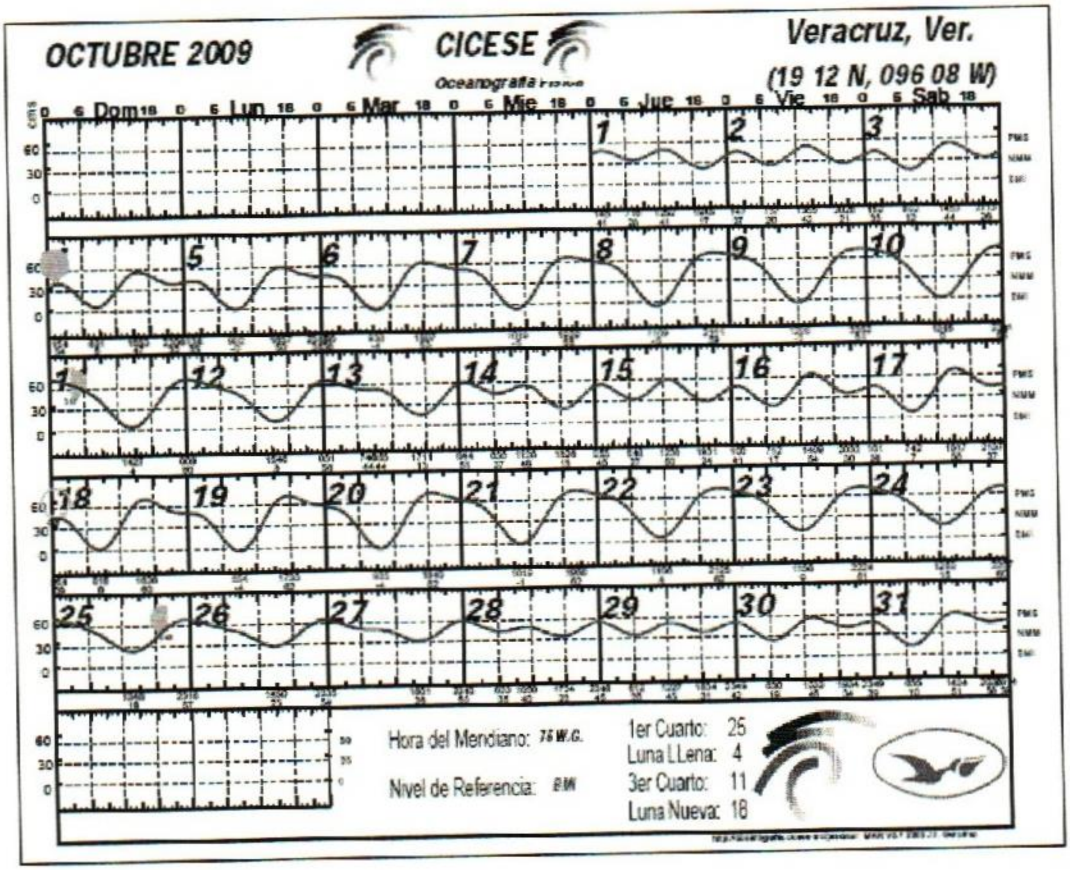

MAYO 2009
CICESE
Oceanografía Física
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Hora del Meridiano: 75 W.G.
Nivel de Referencia: BM
1er Cuarto: 1 30
Luna LLena: 8
3er Cuarto: 17
Luna Nueva 24

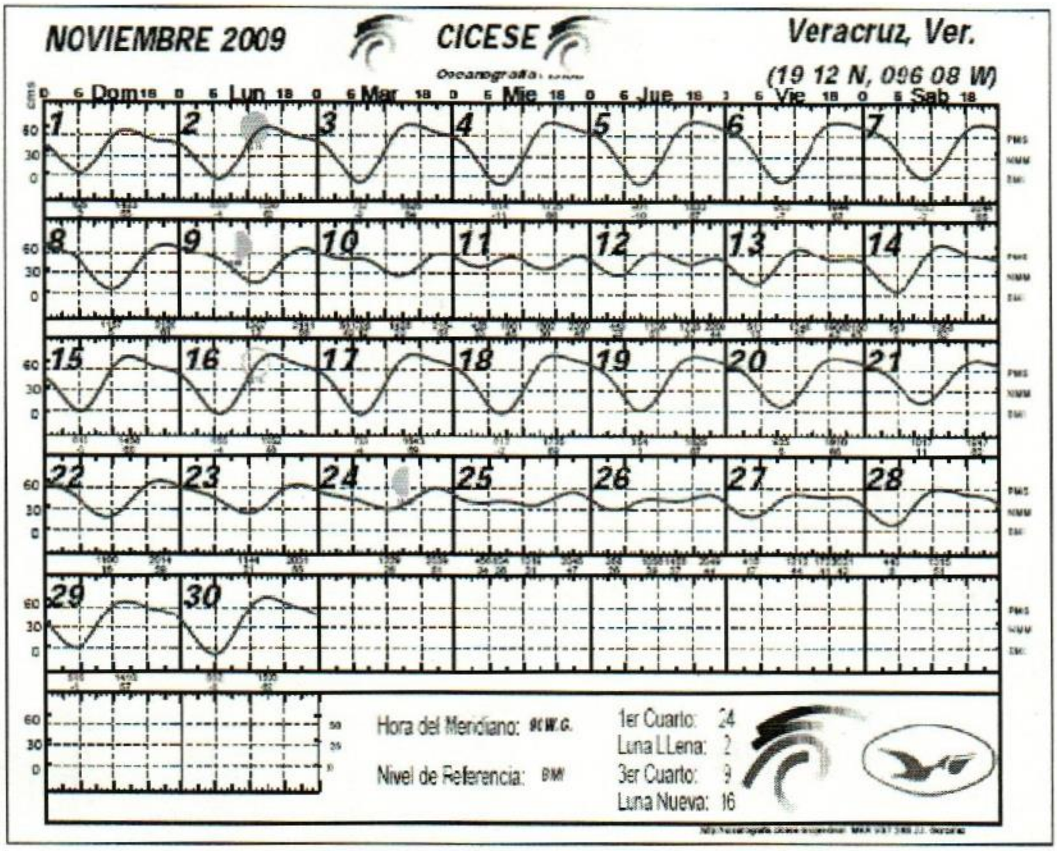

JUNIO 2009
CICESE
Oceanografía Física
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Dom
Lun
Mar
Mie
Jue
Vie
Sab
Hora del Meridiano: 75 W.G.
Nivel de Referencia: BMI
1er Cuarto: 29
Luna LLena: 7
3er Cuarto: 15
Luna Nueva: 22

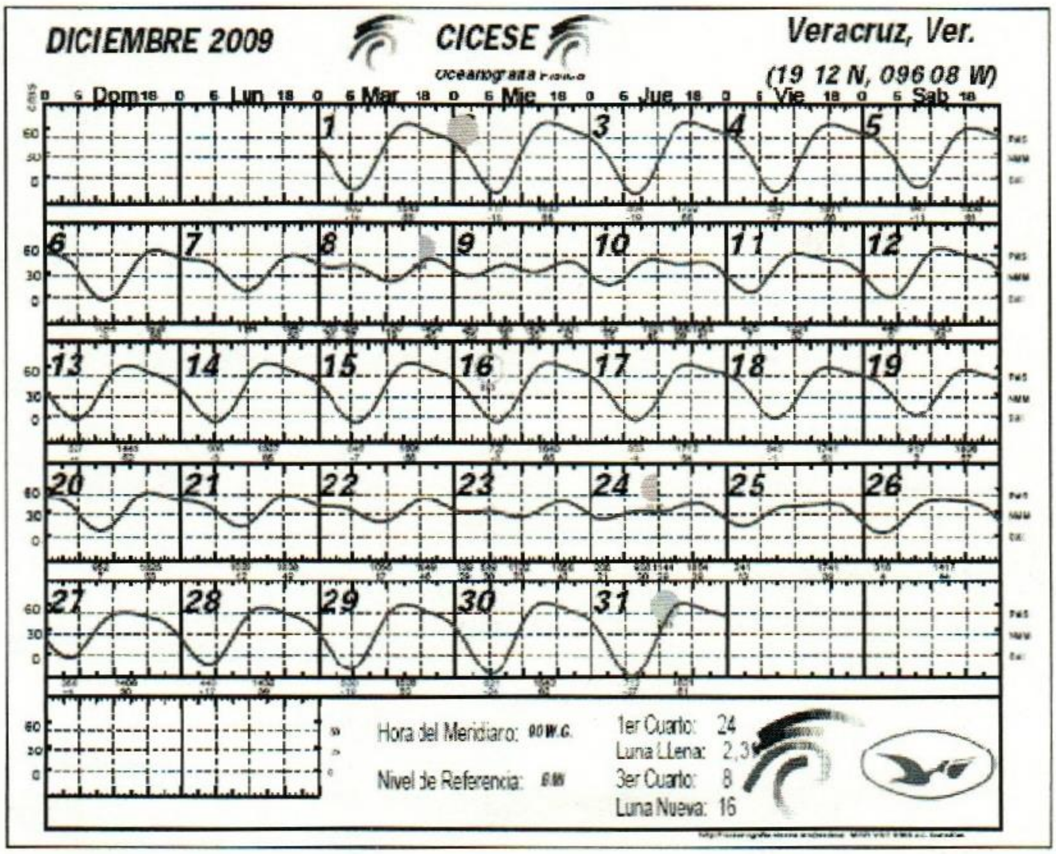

JULIO 2009
CICESE
Oceanografía Física
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Dom
Lun
Mar
Mie
Jue
Vie
Sab
Hora del Meridiano: 75 W.G.
Nivel de Referencia: BMI
1er Cuarto: 28
Luna LLena: 7
3er Cuarto: 15
Luna Nueva: 21


AGOSTO 2009
CICESE
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Dom
Lun
Mar
Mie
Jue
Vie
Sab
Hora del Meridiano: 75W.G.
Nivel de Referencia: BM
1er Cuarto: 27
Luna Llena: 5
3er Cuarto: 13
Luna Nueva: 20


SEPTIEMBRE 2009
CICESE
Oceanografía
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Dom
Lun
Mar
Mie
Jue
Vie
Sab
Hora del Meridiano:
Nivel de Referencia:
1er Cuarto: 25
Luna Llena: 4
3er Cuarto: 11
Luna Nueva: 18


OCTUBRE 2009
CICESE
Oceanografía
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Dom
Lun
Mar
Mie
Jue
Vie
Sab
Hora del Meridiano:
Nivel de Referencia:
1er Cuarto: 25
Luna Llena: 4
3er Cuarto: 11
Luna Nueva: 18


NOVIEMBRE 2009
CICESE
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Hora del Meridiano:
Nivel de Referencia:
1er Cuarto: 24
Luna LLena: 2
3er Cuarto: 9
Luna Nueva: 16


DICIEMBRE 2009
CICESE
Veracruz, Ver.
(19 12 N, 096 08 W)
Hora del Meridiano:
Nivel de Referencia:
1er Cuarto: 24
3er Cuarto: 8
Luna Nueva: 16