UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS

FACULTAD DE INGENIERÍA
CAMPUS I

COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

"TRES ESCENARIOS DE SIGNIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

PRESENTA

Greysi Crystabel Gutiérrez Vázquez 15112005

DIRECTOR DE TESIS

DR. Hipólito Hernández Pérez

TUXTLA GUTIÉRREZ, CHIAPAS, NOVIEMBRE DE 2020

Tuxtla Gutiérrez Chiapas; a 09 de octubre del 2020.

Dr. Arcadio Zebadúa Sánchez
Encargado de Dirección
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Chiapas.
Presente.

Por este medio me permito informarle a usted que he concluido con la dirección de la **tesis** que, para obtener el **Grado de la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa**, presenta la alumna **C. Greysi Crystabel Gutiérrez Vázquez,** titulada: **"tres escenarios de significación de los números complejos",** por lo que doy mi voto aprobatorio para que pueda seguir con los trámites correspondientes.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE.

Dr. Hipólito Hernández Pérez
Director de tesis

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a 09 de octubre del 2020.

Dr. Arcadio Zebadúa Sánchez
Encargado de Dirección
Facultad de Ingeniería, Campus I
Universidad Autónoma de Chiapas
Presente.

En nuestra calidad de sinodales del examen para obtener el Grado de la **Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa** del (a) alumno (a) **C. Greysi Crystabel Gutiérrez Vázquez**, nos permitimos manifestarle la aceptación del trabajo escrito de **Tesis** titulada: **"tres escenarios de significación de los números complejos".** Quedamos enterados de que formaremos parte del jurado del examen de grado, en la fecha y hora que se nos comunique.

ATENTAMENTE
"POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR"

DR. HIPÓLITO HERNÁNDEZ PÉREZ
DIRECTOR DE TESIS

DR. MIGUEL SOLÍS ESQUINCA
ASESOR DE TESIS

DR. GERMÁN MUÑOZ ORTEGA
ASESOR DE TESIS

*Archivo/Minutario.

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas.
21 de octubre de 2020.
Oficio No. F.I.01.0557/2020.

LIC. GREYSI CRYSTABEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
ALUMNA DE LA MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA
P R E S E N T E:

Por este medio comunico a usted, que se autoriza la impresión de su trabajo de tesis denominado: ***"Tres escenarios de significación de los números complejos"*** para que pueda continuar con los trámites de titulación para la obtención del grado.

Sin otro particular, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"POR LA CONCIENCIA DE LA NECESIDAD DE SERVIR"

DR. ARCADIO ZEBADÚA SÁNCHEZ
ENCARGADO DE DIRECCIÓN

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIAPAS
DIRECCIÓN DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA

C.c.p. Dra. Daisy Escobar Castillejos. Coordinadora de Investigación y Posgrado. Facultad de Ingeniería.
C.c.p. Archivo/minutario
AZS/DEC/amj

Código: FO-113-09-05
Revisión: 0

CARTA DE AUTORIZACIÓN PARA LA PUBLICACIÓN ELECTRÓNICA DE LA TESIS DE TÍTULO Y/O GRADO.

El (la) suscrito (a) Greysi Crystabel Gutiérrez Vázquez, Autor (a) de la tesis bajo el título de "Tres escenarios de significación de los números complejos.",

presentada y aprobada en el año 20 20 como requisito para obtener el título o grado de Maestro en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa autorizo a la Dirección del Sistema de Bibliotecas Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH), a que realice la difusión de la creación intelectual mencionada, con fines académicos para que contribuya a la divulgación del conocimiento científico, tecnológico y de innovación que se produce en la Universidad, mediante la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Consulta del trabajo de título o de grado a través de la Biblioteca Digital de Tesis (BIDITE) del Sistema de Bibliotecas de la Universidad Autónoma de Chiapas (SIBI-UNACH) que incluye tesis de pregrado de todos los programas educativos de la Universidad, así como de los posgrados no registrados ni reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad del CONACYT.

- En el caso de tratarse de tesis de maestría y/o doctorado de programas educativos que sí se encuentren registrados y reconocidos en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) del Consejo Nacional del Ciencia y Tecnología (CONACYT), podrán consultarse en el Repositorio Institucional de la Universidad Autónoma de Chiapas (RIUNACH).

Tuxtla Gutiérrez, Chiapas; a los 10 días del mes de Noviembre del año 2020.

Greysi Crystabel Gutiérrez Vázquez
Nombre y firma del Tesista o Tesistas

La vida se encuentra plagada de retos y esta tesis es uno de ellos. Tras verme dentro de ella, me he dado cuenta que más allá de ser un reto, es una base en el largo camino que estoy por emprender en mi profesión y en esta bonita ciencia.

Agradezco a Dios por darme la vida y permitirme llegar con salud a este día.

A mis padres, abuelitos y hermanos por impulsarme, darme su apoyo a pesar de las dificultades, por creer en mí siempre y motivarme a superarme, gracias por estar siempre a mi lado, espero que lo que he logrado hasta el momento los haga sentirse orgullosos.

Gracias Hugo, por tus consejos en los momentos de crisis, por estar siempre al pendiente de mí en cada situación, por tener las palabras de aliento en el momento preciso, por tu apoyo y sentido del humor.

A mis profesores: Gabriela, Miguel, Edgar, Germán, Cristóbal y Pierre; personas de gran sabiduría quienes a través de sus conocimientos me han ayudado a llegar al punto en el que me encuentro.

Y sobre todo a usted Dr. Hipólito, por tomarse el tiempo para trasmitirme sus conocimientos a través de esta tesis y por su dedicación al leerme. Gran parte del desarrollo de este trabajo se lo debo a usted. ¡Que Dios lo bendiga! Siempre me sentiré muy contenta y agradecida con la vida por conocer a gente como usted.

Gracias a mis amigos por su cariño, especialmente a ti Paola Balda tú sabes lo mucho que te quiero, la vida me dio un gran regalo al conocerte.

Con amor….

Greysi

No dejemos nunca de estudiar y aprender cosas nuevas y no perdamos nunca la ilusión que originalmente nos motivó a incursionar en el ámbito de esta bonita ciencia. Evitemos caer en la rutina y el aburrimiento pues siempre hay algo que aprender y algo que enseñar, de manera diferente a como lo hemos aprendido.

Estamos llamados a seguir con nuestra formación, para que en un futuro próximo podamos potenciar el desarrollo de la ciencia en nuestra sociedad; pues es sabido que un país sin educación difícilmente podrá alcanzar su completo desarrollo y no me refiero con esto al desarrollo económico solamente. Sino a la formación de individuos críticos y reflexivos que puedan continuar con la mejora de las tradiciones humanas, la cual es el preguntarse el porqué de las cosas.

Índice

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación realizaremos un análisis histórico-epistemológico de los números complejos, ello emerge bajo la necesidad de poder significarlos. El motivo de centrarnos en significar y analizar a estos números es porque existen dificultades dentro de las aulas cuando se trabajan con estos números y situarlos desde la mirada histórica-epistemológica se debe a que los números complejos nacen desde un contexto puramente matemático.

Para ello se requirió de entender cómo los números complejos emergieron y se desarrollaron, cuáles fueron sus ideas germinales y sus medios de significación desde tres escenarios diferentes. Estas cuestiones no se encuentran explícitamente en los conocimientos, pues los procesos de transposición y la búsqueda de la formalización de la matemática obligaron a que esto se esconda en la historia. Nuestra tarea es poder indagar para entender estos asuntos que la historia ha olvidado.

Los tres escenarios que indagaremos para poder significarlos a través de un análisis histórico-epistemológico son las siguientes etapas: algebraica, analítica y geométrica. De esta manera buscando esa significación, tratando de entender su naturaleza y su estructura, de determinar las causas que posibilitaron su aparición, de identificar las diferentes etapas de su construcción en el ámbito científico, nuestra investigación se basa en una aproximación teórica que se conoce como Socioepistemología.

En particular, veremos cómo los números complejos son el resultado de una actividad humana, cuyas huellas desaparecen en los libros de textos, en donde se presenta formalmente la obra acabada, lo cual explica en gran parte su pérdida de significado en el medio educativo.

En el primer capítulo presentaremos la motivación que impulsa a realizar el trabajo de investigación, la problemática que se ha generado en torno a los números complejos en la escuela, qué se ha hablado ya de los números complejos en lo histórico-epistemológico y cuáles serían entonces nuestros objetivos.

El capítulo dos delimita el marco teórico sobre el cual se cimienta la investigación, en nuestro caso la Socioepistemológia, haciendo énfasis en las prácticas y usos en la significación de la matemática.

En el capítulo tres hablaremos sobre la metodología a emplear, el cual se encuentra basado en un acercamiento de Espinosa para la realización de un análisis histórico-epistemológico. Para ello se realizaron unas mallas las cuales nos permitieron realizar la investigación de manera más objetiva y precisa.

En el capítulo cuatro es aquí donde realizamos el análisis histórico-epistemológico de los números complejos desde tres escenarios de significación. Todo ello siempre enfocado desde las mallas realizadas en la metodología.

Por último, se presentan las conclusiones y las referencias que fueron usadas en la realización de este trabajo.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVO

"Una gran fuerza explicativa posee para nosotros la comprensión de las Matemáticas en términos históricos: tanto por sus objetos como por sus métodos, por sus criterios de validación, las matemáticas sólo pueden ser estudiadas como comunidades humanas, con sus vicios y virtudes, las que generan el conocimiento matemático. No olvidar que esta dimensión es esencial para la práctica matemática, pero para la Educación Matemática es más que eso: es determinante..."

Ruiz

1. ANTECEDENTES, PROBLEMÁTICA Y OBJETIVO

1.1 MOTIVACIÓN

No hay duda que podemos imaginar números. A veces imagino que tengo 15 años o que toda la gente que me rodea vivirá por más de 100 años o quizá que en este preciso momento existieran casos nulos de injusticia en mi país y no cabe la menor duda que esto serían “números imaginarios”; pero el uso matemático de los números imaginarios no tiene nada que ver con estas fantasías.

Entonces, ¿existen o no los números imaginarios? Al decir que los números complejos no existen como algo tangible es cierto, como tampoco lo serían los números reales; es decir, yo no me voy a encontrar al número 2 paseando en un parque o a $\sqrt{-1}$ en la parada del transporte público. Pero nuestro concepto de existencia no se refería a eso, sino más bien cuando se intenta su representación o se trabajan nociones donde utilizan estos números.

En consecuencia, les explicaré cómo personalmente respondí a esa pregunta: Cursé el nivel medio superior en el Colegio de Bachilleres de Chiapas Plantel 22 (COBACH 22) en el municipio de Yajalón, Chiapas; hasta ese momento únicamente podía imaginarme números. A término del bachillerato con el apoyo de mis padres salgo de mi pueblo a presentar el examen de admisión en la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas (FCFM) postulándome para la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH) en Tuxtla Gutiérrez. Afortunadamente aprobé y ahí comienza todo… Cursé materias como Cálculo, Análisis Matemático, Topología, Álgebra lineal, Algebra Moderna, Estadística, Programación, Física, Probabilidad, Variable Compleja, entre otras. Me centraré a hablarles de ésta última.

El poder de cálculo que se esconde detrás de los números complejos, es algo mágico. Con un mínimo de esfuerzo, podemos derivar identidades y fórmulas trigonométricas que requieren de un trabajo tedioso y agotador, siguiendo los métodos usuales. Muchos conceptos de la matemática, como el de función, límites, series de potencias y continuidad se estudian de manera bastante natural dentro del ambiente de los números complejos. Los argumentos de prueba son mucho más intuitivos y transparentes en el plano.

Para los matemáticos la existencia de estos números no representa ningún problema, pues forman parte de su vida cotidiana, del mismo modo que el número 3 o π. Puede que los números imaginarios no nos sean de ayuda cuando vamos a la tienda, pero para cualquier matemático, diseñador aeronáutico o ingeniero eléctrico tiene una importancia fundamental. Y agregando un número real a un número imaginario obtenemos lo que se llama un "número complejo" que a primera impresión suena menos filosóficamente problemático.

Todo aparentemente marchaba muy bien, hasta que seis meses después de graduarme de la licenciatura, ingreso a la facultad de ingeniería para cursar la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa en la misma casa de estudios UNACH. Al convivir con compañeros graduados de distintas licenciaturas comencé a cuestionarme sobre el significado y los usos que cada uno de ellos tenía respecto los números complejos. Nunca antes lo hacía pues al estar parada en un terreno matemático ya no había nada que cuestionar y no era así, detrás de toda esa belleza en la estructura de los números complejos hay una historia que no podemos omitir y que puede apoyarnos a significarlos.

1.2 LOS NÚMEROS COMPLEJOS EN LA ESCUELA

> *"Señores, esto es completamente cierto: $e^{i\pi}+1=0$; es absolutamente paradójico; no podemos entenderlo y no sabemos qué significa. Pero lo hemos demostrado, y por lo tanto sabemos que debe ser verdadero". Benjamín Pierce*

Se ha mencionado reiteradamente que la famosa fórmula de Euler es una de las más bellas de la matemática. Ciertamente reúne en una sencilla expresión los números más famosos junto con las operaciones básicas logrando unificar conceptos numéricos surgidos en diferentes contextos. El número π proviene de la geometría, el número e del análisis y el número i del álgebra. Y en esta fórmula de Euler se mezcla lo imaginario y lo real, lo racional y lo irracional, lo algebraico y lo trascendente.

Muchos apreciamos esta belleza ya que a partir de unos elementos inicialmente dispersos y sin relación, la mente humana es capaz de crear una sinfonía que los armoniza y los muestra como parte de un todo.

Es por esto que al abordar el tema de los números complejos es muy importante ya que hoy en día son utilizados por una comunidad muy grande como lo es la Matemática, Física o la ingeniería. Se enseña a todo ingeniero cómo usar el análisis complejo para resolver problemas prácticos en los primeros cursos de la universidad. Los estudiantes de ingeniería los abordan al estudiar las oscilaciones, movimientos que se repiten de forma periódica. Por ejemplo: la vibración de un edificio en un terremoto, la vibración de automóviles o la transmisión de corrientes eléctricas alternas (Impedancia Compleja).

Pero, ¿podemos creer que las matemáticas alcanzaran la seguridad absoluta sin ningún sacrificio? Según Poncairé (1978) nada de eso ocurre, lo que han ganado en seguridad, lo han perdido en objetividad. Es alejándose de la realidad como han adquirido esa pureza perfecta. Se puede recorrer libremente todo su dominio, antes erizado de obstáculos, pero estos obstáculos no han desaparecido, fueron únicamente transportados a la frontera donde falta vencerlas de nuevo si se la quiere franquear y penetrar en el reino de la práctica.

Ahora desde el plano de la matemática escolar el tema de los Números Complejos, a pesar de ser tan hermoso por integrar la trigonometría, el álgebra y la geometría, es muy poco estudiado en la escuela básica, según Riviera (2015). Además argumenta que, para muchos docentes la finalidad de los números complejos está en poder calcular las raíces enésimas de la unidad. En los cursos de matemáticas básicas en el nivel superior apenas se esbozan algunas de sus propiedades más importantes, dejando de lado algunos aspectos como los geométricos los cuales son importantes.

Los números complejos se encuentran inmersos dentro de la matemática escolar en el nivel medio superior y superior. Maumary (2015) nos dice que el concepto de Número Complejo genera problemáticas tanto en los estudiantes como en los docentes dentro de las aulas, un ejemplo de ello es la investigación de Sandoval (2010) quien remarca que existen dificultades en la apropiación del concepto y significado de expresiones algebraicas y sus operaciones.

Por otra parte Buhlea y Gómez (2007) realizan estudio histórico-epistemológico centrado en analizar el estadio del concepto de número complejo al final del siglo XVIII y su evolución en el siglo XIX, así como las dificultades asociadas a él y la observación de la manera en que fueron superadas. A través de ese análisis logran identifican en los estudiantes tres dificultades principales:

1. La ambigüedad del signo de la raíz cuadrada (reflejada en Euler).
2. La susceptibilidad de la raíz cuadrada de un número negativo a los signos $+$ y $-$ (reflejada en Peacock).
3. La perplejidad de Vallejo en relación con la operación de los binomios complejos.

Otra dificultad a la que se enfrentan los estudiantes fue identificada por Rossel y Schneider (2004) que trata sobre el manejo que realizan los estudiantes sobre números complejos a través de operaciones entre coordenadas y su representación gráfica (para la suma y la resta las mismas que se realizan para los vectores en el plano cartesiano). Después de trabajar este concepto de vectores en el plano posteriormente intentan dar un nuevo sentido a dichas operaciones pero ahora con el uso de la expresión conocida de los números complejos de la forma $a + bi$. El resultado es el siguiente:

Los alumnos no tuvieron la iniciativa de identificar los pares ordenados (a, b) como números reales, ya que en algunas operaciones que realizaron, fue el profesor quien les hizo observar el hecho de que a, b son números reales los cuales serán representado en el plano de manera usual. Además, cuando se requiere dentro de un problema a los números complejos, como en el caso del logaritmo natural de un número negativo; los estudiantes no hacen uso de ellos (Cantoral y Farfán, 2004).

En consecuencia, Gómez y Pardo (2005) mencionan que es posible que algunas dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas en relación con los complejos a las que se han enfrentado los matemáticos a lo largo de la historia, guarden paralelismo con las que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes con esta materia. Podemos decir que los números complejos aparecieron muy temprano en el paisaje de las matemáticas, pero fueron ignorados sistemáticamente, por su carácter extraño, carentes de sentido e imposibles de representar.

Toda esta disyuntiva implicaría tener en cuenta aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos de los números complejos, todo ello enfatizándolo desde el contexto en el cual surgió ese conocimiento y el uso que cada investigador daba a ese conocimiento.

En la investigación de Carrasco (2017) el alumno aprende por lo que realiza en clases, por el significado que le entrega la actividad llevada a cabo y la posibilidad que se puedan integrar nociones, concepciones, por la capacidad de poder expresar ante sus pares la construcción de su propio conocimiento matemático.

Además, Díaz (2007) nos señala que para atender algunas problemáticas de los números complejos podríamos tomar en cuenta algunos aspectos; entre todos los que menciona retomamos el siguiente:

> "Estructurar la metodología de la enseñanza de los números complejos, de forma que favorezcan el desarrollo integral del alumno en formación docente en los aspectos conceptuales, no solo el significado de la definición, sino en la forma como ha evolucionado el desarrollo del número complejo a través del tiempo; procedimentales no solo en la forma como se opera, sino también su aplicación y actitudinales, cambiar la forma como se ha venido aceptando el estudio de los números complejos, de manera que despierte la motivación y el interés del alumno" (p.62-63).

Por lo tanto, Díaz nos hace hincapié en que debemos implementar en la enseñanza de los números complejos la evolución histórica del número complejo.

Retomando lo anterior en nuestro trabajo se tomará un ejemplo propuesto por Bagni (2001) quien examina de efectividad de la introducción de los números imaginarios, a 73 estudiantes de entre 16 y 18 años de edad, los cuales aún no tenían la necesidad de ampliarse a un nuevo conjunto como los números complejos, es decir, únicamente operaban con números reales, ellos ya sabían resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas. Como un primer acercamiento de los números imaginarios hacia los estudiantes, se les presenta dos soluciones de ecuaciones: la primera solución es la histórica la cual es ideada por Bombelli, resultado de resolver una ecuación cúbica y la segunda es el resultado de una ecuación cuadrática que es usualmente usada por libros, para saber si es aceptada o rechazada por los estudiantes. El autor hace uso de La noción en la didáctica de las matemáticas como divulgación de la idea (La introducción de la historia de las matemáticas en la didáctica).

A fin de poder conocer ¿cuál debería de ser? la ecuación más adecuada como el primer acercamiento de los números complejos a estudiantes que aún desconocen la existencia de estos números, Bagni presenta a sus estudiantes dos exámenes donde ilustra en el Examen 1 la solución histórica ideada por Bombelli ($x^3 - 15x = 4$) y en el Examen 2 la solución cuadrática ($x^2 + 1 = 0$) y pregunta a los estudiantes si están dispuestos a aceptar el procedimiento resolutivo (que prevé el uso de cantidades imaginarias) en los pasos de procedimientos de despeje y después hacer lo mismo con la presencia de los números imaginarios pero ahora en la solución de una ecuación de segundo grado. El tiempo establecido para el primer examen fue de 20 minutos y para el segundo, 10 minutos. Los exámenes fueron los siguientes:

EXAMEN 1:

En un antiguo libro encontramos las siguientes resoluciones de la ecuación:

$$\boldsymbol{x^3\text{-}15x\text{–}4 = 0}$$

Pensamos escribir una sola respuesta x en el modo siguiente:

$x=a\text{-}b$ (primera posición)

Sustituimos esta expresión en et testo de la ecuación y obtenemos:

$$\begin{aligned}
&(a-b)^3-15(a-b)-4 = 0\\
&a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-15(a-b)-4 = 0\\
&a^3-3ab(a-b)-15(a-b)-b^3-4 = 0\\
&a^3-(a-b)(3ab+15)-b^3-4 = 0
\end{aligned}$$

Si queremos que sea: $3ab+15 = 0$, o bien, si escribimos:

$ab = -5$ simplificando: $b = -5/a$ (segunda posición)

obtenemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
&a^3-(-5/a)^3-4 = 0\\
&a^6-4a^3+125 = 0
\end{aligned}$$

Se trata de una ecuación trinomial, en la que si $a^3 = t$ puede escribirse como:

$$t^2 - 4t + 125 = 0$$

Despejando (con la fórmula resolutiva de las ecuaciones de segundo grado), resulta:

$$t = 2 + \sqrt{4 - 125} = 2 + 11\sqrt{-1} \text{ o } t = 2 - \sqrt{4 - 125} = 2 - 11\sqrt{-1}$$

Considerando el primer valor de t, obtenemos para a:

$$a = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Desarrollamos ahora el cubo siguiente (pensando que el cuadrado de $\sqrt{-1}$ sea -1)

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 =$$

$$= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Siendo que para a podemos escribir:

$$a = \sqrt[3]{\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3} = 2 + \sqrt{-1}$$

Recordando la segunda posición y razonando, obtenemos:

$$b = \frac{-5}{a} = -\frac{5}{2 + \sqrt{-1}} = -\frac{5\left(2 - \sqrt{-1}\right)}{\left(2 + \sqrt{-1}\right)\left(2 - \sqrt{-1}\right)} = -\frac{5\left(2 - \sqrt{-1}\right)}{(2)^2 - \left(\sqrt{-1}\right)^2} =$$

$$-\frac{5\left(2 - \sqrt{-1}\right)}{4 + 1} = -2 + \sqrt{-1}$$

Recordando la primera posición, una solución de la ecuación propuesta es:

$$x = a - b = (2 + \sqrt{-1}) - (-2 + \sqrt{-1}) = 4$$

Para comprobarla, sustituimos directamente en el texto, por lo que el primer miembro resulta:

$$4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$$

y es entonces igual al segundo. Por tanto, la solución $\mathbf{x = 4}$ queda comprobada.

Fuente: tomado de Bagni (2001)

El procedimiento resolutivo, no se desarrolla totalmente en el ámbito de los números reales, aquí aparece el manejo de los números imaginarios a través de los cambios de variables necesarios para llegar a una raíz real solamente y el resultado obtenido al final es real, como reales son todos los coeficientes de la ecuación asignada. Ahora veamos cuál es el siguiente examen presentado a los estudiantes.

EXAMEN 2

En un libro antiguo encontramos la siguiente solución a la ecuación:

$$x^2 = -1$$

Si el cuadrado de $\sqrt{-1}$ es -1, las soluciones de la ecuación non:

$$x = \sqrt{-1} \qquad \text{o bien} \qquad x = -\sqrt{-1}$$

Fuente: tomado de Bagni (2001)

En este caso el resultado de la ecuación con coeficientes reales, es no real. Para ambos exámenes realizó la siguiente interrogante: ¿Consideras aceptable la solución antes descrita?

Los resultados fueron los siguientes:

	Examen 1		**Examen 2**	
Tipología de respuestas	Alumnos	Porcentaje	Alumnos	Porcentaje
Aceptable	30	41%	13	18%
No aceptable	18	25%	48	66%
Inseguros	25	34%	12	16%

Podemos notar que el 18% de los estudiantes aceptan al número complejo como solución de una ecuación cuadrática en comparación con un 41% que sí acepta la resolución de la ecuación cúbica tomada de un ejemplo histórico. Debido a estos resultados, se les preguntó a los estudiantes en una entrevista lo siguiente:

¿Por qué acepté la presencia de $\sqrt{-1}$ en la primera resolución y no acepté su presencia en la segunda resolución? Ante esta pregunta los alumnos respondieron: “el resultado de la ecuación de tercer grado es real, mientras que el resultado de la ecuación de segundo grado no”.

Entonces, en efecto, la consideración de cantidades imaginarias en los pasos del procedimiento resolutivo de una ecuación a menudo ha sido aceptada por los alumnos. Esta observación parece reforzar la posibilidad de aprovechar el ejemplo histórico antes referido, mediante una introducción didáctica a los números imaginarios.

Por lo tanto, podemos intuir que la historia de los números complejos debe ser llevada a las aulas si intentamos mejorar su didáctica.

1.3 LOS COMPLEJOS EN LA HISTORIA

Existen algunos conceptos en matemáticas que tardaron muchos años y hasta siglos en desarrollarse, desde el momento en que fueron descubiertos por primera vez, hasta la formalización de los mismos. El avance en el tiempo de la matemática en ocasiones es un proceso lento, debido al carácter formal de esta ciencia: una de sus reglas es que cualquier objeto nuevo debe estar claramente definido para ser aceptado y usado por toda la comunidad. Así pues, muchas ideas incompletas quedaron relegadas a la oscuridad y el olvido por no encajar en el sistema de razonamiento de cierta época, como fue el caso de los números complejos. Pero, ¿Cómo surge la idea de usar estos números? ¿Por qué no aparecieron antes?

La historia del surgimiento de los números complejos refleja la necesidad de ampliación del dominio numérico en la cual emergieron distintas controversias entre los investigadores de esa época. A grandes rasgos se logran identificar cuatro grandes etapas, caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos (Gómez y Pardo, 2005), las cuales son:

- ALGEBRAICA: Primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, consideradas cómo raíces inútiles, aunque coherentes con los métodos algebraicos. Aquí, los números imaginarios[1] se presentan como necesidad del cálculo algebraico.

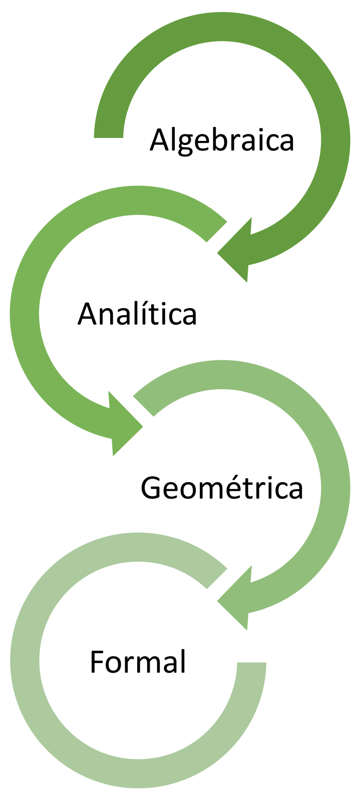
[1] Según el libro de (Smith, 1958) la primera referencia escrita de la raíz cuadrada de un número negativo la encontramos en la obra Stereometría de Herón de Alejandría (Grecia aprox. 10-75) alrededor de la mitad del siglo I. Es este trabajo comparece la operación $\sqrt{(81 - 144)}$ aunque es tomada como √(144 - 81), no sabiéndose si este error es debido al propio Herón o al personal encargado de transcribirlo.
La siguiente referencia sobre esta cuestión se data en el año 275 en la obra de Diophantus (aprox. 200-284) Arithmetica. En su intento de cálculo de los lados de un triángulo rectángulo de perímetro 12 y área 7, Diophantus planteó resolver la ecuación $336x^2 + 24 = 172x$, la cual es una ecuación con raíces compejas.

- ANALÍTICA: Aceptación y generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, consideradas como cantidades que por su naturaleza son imposibles, ya que no se pueden ubicar entre los números posibles: positivos, negativos, o nulos. Aquí emerge la idea de que un número imaginario es media proporcional entre dos reales de signo contrario.

- GEOMÉTRICA: Introducción de un eje de imaginarios que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad perpendicular a 1 y consideración de los imaginarios como vectores del plano. Así, en el plano de ejes real e imaginario, un vector queda representado por $a + bi$; y $\sqrt{-1}$ actúa como rotación de 90° alrededor de 0, es decir como un signo o índice de perpendicularidad.

- FORMAL: Formalización de los números complejos y consideración de los mismos como pares ordenados de números reales.

Etapas del número complejo:



Se demoraron aproximadamente tres siglos desde la etapa algébrica hasta la formalización de los mismos. Es importante mencionar y resaltar estas etapas ya que la investigación se realizará en torno a ellas.

1.4 ASPECTOS HISTÓRICOS-EPISTEMOLÓGICOS

La utilización de la historia en la educación matemática por muchos años ha estado muy ausente y cuando aparece, se vincula generalmente a la narración de anécdotas o biografías que no prestan mayor aporte a la construcción e conocimientos matemáticos según Vidal, Quintanilla y Maz (2010).

En este sentido es de importancia citar lo mencionado por Sierra (1997), ya que presenta algunas razones para considerar la Historia de las Matemáticas en su enseñanza:

> "Para el profesor, constituye un antídoto contra el formalismo y el aislamiento de conocimiento matemático y un conjunto de medios que le permiten apropiarse mejor de dicho conocimiento, a la vez que le ayudan a ordenar la presentación de los temas del currículo. La exploración de la Historia por parte del profesor, le ayuda igualmente a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado, los errores cometidos por los propios matemáticos (que a veces se reproducen en los alumnos), así como la visión de la actividad matemática, como actividad humana con sus glorias y sus miserias. Para los alumnos prepara un terreno donde las matemáticas dejan de jugar el papel de edificio acabado, reestableciéndose su estatus de actividad cultural, de actividad humana, a la vez que les ayuda en su motivación para el aprendizaje. Además, facilita conocer la génesis de los conceptos y los problemas que han pretendido resolver, ayudando a su compresión" (p. 96).

También destaca que el trabajo histórico-epistemológico sirve para informarnos sobre el presente, pues muchas de nuestras suposiciones actuales salen a la luz del trabajo histórico. De tal forma que podemos intentar entenderla desde la perspectiva de sus creadores. Sin embargo, la implementación en clase debe estar en un nivel didáctico y no como objeto mismo de la enseñanza, esto es, como un elemento motivador, que permita a los estudiantes conseguir una mejor comprensión y entendimiento de las matemáticas, pero teniendo claro que esto no las hará más fáciles.

Retomando la investigación realizada por Bagni (2001), él considera que el papel de la historia de la matemática en la enseñanza es legítimamente una parte de la investigación en educación matemática. Otra cuestión notable de su investigación es la conclusión de los ejemplos de los números complejos respecto a su historia.

Por otro lado, Nolla (2001, citado por Rodríguez y Vicario, 2015) alude que los conceptos y las ideas matemáticas que se tratan en la enseñanza, son presentados a los alumnos de una forma cerrada y acabada, es decir, se olvida que ha surgido después de un largo proceso de gestación, en las que las intuiciones más fecundas con otras estériles, han configurado sus presentaciones sucesivas. En efecto, es de reconocerse que a lo largo de la historia las ideas han sido generadas por diversos tipos de problemas y contextos, prácticos o teóricos, pertenecientes a la propia matemática o a otras disciplinas. El conocimiento de estos problemas y el estudio de la evolución de su tratamiento y de los nuevos problemas que han generado, proporcionan los fundamentos para la comprensión de las ideas y conceptos que de ellos han resultado.

Entonces si realizamos un análisis histórico-epistemológico de la matemática es importante dar realce a los debates y las controversias entre los científicos de ese momento, los avances y retrocesos, la refutación, creación y complementación de conceptos. De esta manera podremos comprender las problemáticas e intereses que llevaron a los matemáticos a construir y dar significado a los objetos y teorías que conocemos y que algunos usamos hoy en día. (Por ejemplo, actualmente tenemos un estándar de lo que es aceptado como una demostración matemática rigurosa; y lo que hoy puede ser visto como un argumento no riguroso, quizá fue aceptado por muchísimos siglos como tal., esto nos puede ayudar como docentes a comprender las dificultades de los estudiantes a establecer lo que es una demostración).

1.5 PROBLEMÁTICA

Retomado todo lo anterior podemos notar que los números complejos están generando dificultades dentro del aula cuando estudiantes o los mismos docentes trabajan nociones donde operan con estos nuevos números algunas de ellas son las siguientes.

- Dificultades en la apropiación del concepto y significado de expresiones algebraicas y sus operaciones.
- La ambigüedad del signo de la raíz cuadrada (reflejada en Euler).
- La susceptibilidad de la raíz cuadrada de un número negativo a los signos $+$ y $-$ (reflejada en Peacock).
- La perplejidad de Vallejo en relación con la operación de los binomios complejos.

- El manejo que realizan los estudiantes sobre números complejos a través de operaciones entre coordenadas y su representación gráfica (para la suma y la resta las mismas que se realizan para los vectores en el plano cartesiano).
- Dificultades e inconsistencias conceptuales y algorítmicas a los que se enfrentaron los matemáticos a lo largo de la historia pueden guardar paralelismo con las dificultades a las cuales se enfrentan los estudiantes actualmente.

Por lo tanto, el presente trabajo tendrá como objetivo abordar un análisis histórico-epistemológico (la historia contada desde adentro y no desde aquello que un agente externo quiere contar, es decir, la historia desde los que la hicieron y no desde aquellos que la van a mostrar), a través de tres escenarios de construcción la etapa algebraica, analítica y geométrica con la finalidad de conocer los distintos significados de estos números.

De lo anterior reconocemos como parte de la problemática la falta de significados de los números complejos haciéndonos entonces la siguiente pregunta, ¿Cómo podemos dotar de significados a los números complejos desde una mirada histórica-epistemológica?

Si llegamos a obtener evidencias de la pregunta anterior, que la matemática es una construcción humana que responde a necesidades de una sociedad que le marca y delimita su campo, según Buendía (2010) resalta que la matemática es una actividad humana, cultural e históricamente situada. Esto pretende reconocer el carácter social de la matemática a través de entender aquellas prácticas que hoy hacen que hagamos lo que hacemos.

Entonces reconoceremos que entender la naturaleza de los números complejos, la estructura que los caracteriza, algunas etapas identificadas y las causas de su construcción, serán una labor indispensable para poder comprender y atender situaciones didácticas referentes al tópico de los números complejos.

CAPÍTULO 2

ASPECTOS TEÓRICOS

Señores, es cierto que

$$e^{i\pi} = cos\pi + isen\pi = -1$$

pero es totalmente paradójico: no lo podemos entender y no conocemos su significado, pero lo hemos demostrado y por lo tanto sabemos que tiene que ser verdad.

Benjamin Pierce

2. ASPECTOS TEÓRICOS

Este capítulo tiene como meta exponer el marco teórico a abordar para el proceso de investigación de la problemática que ya hemos expuesto de los números complejos, identificaremos los aspectos clave del marco teórico que servirán como sustento para esclarecer la falta de significados de dichos números. Todo esto nos desembocará a habar y definir el concepto de prácticas y usos en la matemática educativa, específicamente en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

También definiremos qué es significación y escenario desde la Real academia española y algunos conceptos usados en matemática educativa, para finalmente definir qué estamos entendiendo por un escenario de significación ya que durante el proceso de investigación trabajaremos en torno a este concepto.

2.1 PRÁCTICAS Y USOS EN LA SIGNIFICACIÓN DE LA MATEMÁTICA

La Matemática es creación y descubrimiento, se desarrolla de manera acumulativa porque se construye consistentemente sobre las potencialidades iniciales (Cañón, 1993). El descubrimiento se interpreta aquí como la percepción a través de la razón y el conocimiento existente. Se analiza desde el enfoque de quien lo inventa o descubre, quien lo aprende y quien lo usa, con la finalidad en este caso de mejorar su didáctica.

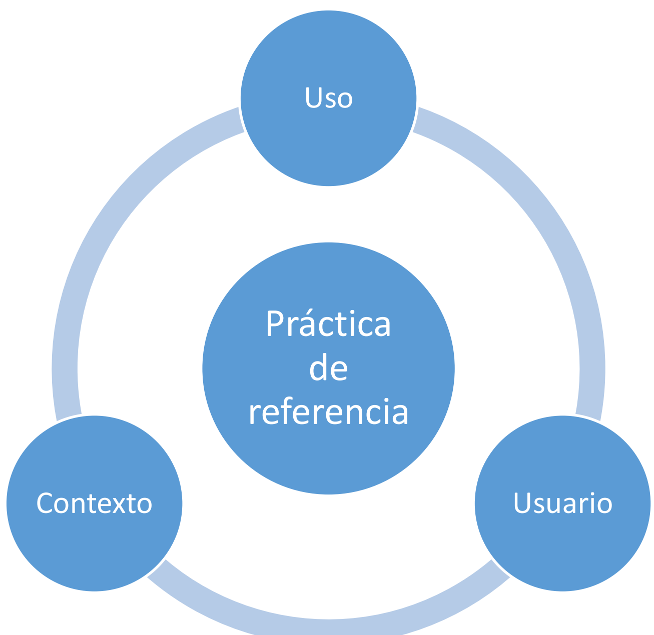
El carácter social de las matemáticas, según Buendía (2012) tendría entre sus objetivos proponer epistemologías de prácticas en las que se formula que el ejercicio de ciertas prácticas antecede a la producción de conceptos determinados; esa tendría que ser la base de la significación que se busca en la matemática escolar y en el seno de una epistemología de prácticas emerge el uso del conocimiento. En este sentido, la autora menciona:

> "Hablar, entonces, del conocimiento en uso, resulta un contraste con lo que los sistemas educativos persiguen… los sistemas educativos se han preocupado por lo que sabe un estudiante o un docente, pero no por *cómo se usa ese saber,* lo cual tiene mucha más relación con una matemática escolar funcional y articulada." (P. 10)

Asimismo, Cantoral (2013) dice que:

"La *noción* de uso, noción compleja que exige a su vez de referencias a los contextos socioculturales de significación específicos del episodio estudiado. El *uso* como noción, exige una *práctica de referencia* y acompaña al proceso de formación del *concepto*, su localización resulta entonces fundamental para orientar la intervención educativa, para el *rediseño del discurso Matemático Escolar*. En síntesis, no existe un *uso*, sin *usuario*, y este no es tal sin el *contexto*, es una expresión objetivada de la existencia de una *práctica de referencia." (P. 98)*

A continuación, presentamos la triada de la práctica de referencia propuesta por Cantoral (2013)



Por esto, proponemos conocer y entender el uso de los números complejos desde el escenario algebraico, geométrico y analítico, al seno de la investigación en Socioepistemología, a través del análisis del funcionamiento y forma de ese saber.

2.2 LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA COMO MARCO TEÓRICO

En el capítulo uno enlistamos y reconocimos como problemática la falta de significados del concepto de números complejos en la matemática escolar. Esta problemática podemos atenderla desde el enfoque de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME).

La TSME asume que el conocimiento matemático, tanto en lo básico como aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de actividades prácticas socialmente valoradas y normadas (Cantoral, 2013).

Este enfoque aborda al tratamiento del saber. Si se construye, reconstruye, significa y resignifica, se ubica en un tiempo y espacio determinado, se explora desde quien aprende, inventa y usa; se posiciona a la opción constructiva desde la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se rediseñe con fines didácticos. Esto es en definitiva que el saber se problematiza (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014).

Entonces asumimos que el pensamiento humano posee una herencia de orden cultural, la historia de los números complejos debe algo a la herencia educativa de su periodo actual. Cada época en la historia de la enseñanza produce conocimiento, mediante sus prácticas sociales (lo que hace hacer a los individuos lo que hacen).

Esto no habrá de entenderse en el sentido de que todo conocimiento obedece a una necesidad de naturaleza práctica, puesto que los historiadores de la ciencia han documentado suficientemente que algunas nociones matemáticas no provienen de sucesivas abstracciones y generalizaciones de la empírea. Más bien establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen y las actividades de razonamiento en que dichos conocimientos son generados. (Cantoral y Reyes-Gasperini, 2014).

Actualmente, la Socioepistemología postula que para atender a la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento al nivel cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos, habrá de problematizarse el saber en un amplio sentido, situándole en el entorno de la vida del aprendiz (individual o colectivo) donde habrá de rediseñarse el discurso matemático escolar (Cantoral, 2013). Esto llevó a adoptar un posicionamiento sobre las matemáticas y las ciencias, así como su educación para asumir que ellas están ligadas a prácticas sociales altamente valoradas.

En consecuencia, para lograr la problematización de tres momentos históricos de los números complejos debemos descentralizarnos del objeto matemático y asumir este concepto como una construcción social y entender su naturaleza social. Para ello necesitamos reconocer las actividades humanas asociadas a los números complejos en los distintos contextos.

La Socioepistemología descansa en los siguientes fundamentos básicos sin tener una secuencia lineal; es decir, los cuatro explican a los cuatro.

Normatividad de la práctica social.

- La práctica social no es lo que hace en sí el individuo, sino lo que les hace hacer lo que hacen, lo que norma su accionar (la orientación de la práctica). (Cantoral, 2014)

Racionalidad contextualizada.

- Enuncia que la racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado (Espinoza, 2009)

Relativismo epistemológico.

- Este principio acepta que dentro de aquellas argumentaciones que sean "erradas" existe un pensamiento matemático que debe ser estudiado y considerado, para de allí, desarrollar el pensamiento matemático y construir conocimiento. (Cantoral, 2014)

La resignificación progresiva.

- Un significado, es puesto en funcionamiento en situaciones nuevas y, bajo el mismo esquema constructivo, se resignifica, produciendo conocimientos en los cuales se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber. (Cantoral, 2014)

Fuente. Construcción propia

Con estos principios básicos de la Socioepistemología se guiará la presente investigación.

En el transcurso de este trabajo hablaremos de tres escenarios de significación, por lo cual es importante y conveniente definir qué estamos entendiendo por escenario, significación y escenario de significación.

2.3 ESCENARIOS DE SIGNIFICACIÓN

2.3.1 ¿QUÉ ES ESCENARIO?

La descripción del significado de la palabra escenario, según la Real Academia Española (RAE) encontramos la siguiente definición la cual va en relación a lo que estamos abordando:

1. *m. Lugar en que ocurre o se desarrolla un suceso.*

En el caso de la Matemática Educativa y específicamente en Socioepistemología, (Cantoral, 2014) enfatiza que la enseñanza de las matemáticas, se sitúa en escenarios sociales y culturales específicos que habrán de tomarse en cuenta al momento de elaborar propuestas pedagógicas alternativas. Es fundamental en consecuencia, asumir que en dichas propuestas tanto las realidades del que aprende como de quienes enseñan habrán de estructurarse atendiendo al escenario donde se contextualizan los saberes específicos.

Los contextos van a ser los entornos de situación donde se considera un hecho (Cordero, 2005, p. 271). En este caso hacemos referencia al que proporciona cualquier objeto matemático o varios objetos matemáticos y sus relaciones.

2.3.1 ¿QUÉ ES SIGNIFICACIÓN?

Según la RAE, la definición de significación es la siguiente:

1. *f. Acción y efecto de significar[2] o significarse.*

En la TSME el significado depende del uso del conocimiento matemático en cada contexto y como se reconoce una pluralidad de contexto se afirma que, el conocimiento matemático cuando se pone en uso en cada contexto, se vuelve funcional cuando dicho uso tiene una racionalidad. Es así que el conocimiento matemático se somete a un proceso de significación progresiva según Márquez (2018).

En Matemática Educativa se abandona la preocupación de la validez de los enunciados matemáticos (a diferencia de las ciencias matemáticas) para tomar dirección hacia la comprensión. Y entonces el significado aparece como un elemento importante, ya que entender un concepto es concebido como el acto de adquirir un significado (Sierpinska, 1990, citado en D´amore, 2005)

---

[2] Según la RAE: intr. Representar, valer, tener importancia.

Además, la caracterización del significado no es completamente definida y cerrada, sino que considera la potencialidad de que puedan surgir nuevos usos de algún objeto matemático. El propio desarrollo del conocimiento matemático puede conllevar que se desarrolle nuevos significados de los objetos matemáticos.

2.3.2 ESCENARIO DE SIGNIFICACIÓN

En nuestra investigación definiremos un escenario de significación como el conjunto de circunstancias que rodean a etapas matemáticas (en este caso la etapa geométrica, algebraica y analítica de los números complejos) en donde se desarrolla desde su razón de existencia, la funcionalidad que le da origen y lo representa; donde existirán aspectos o características de esta funcionalidad que también forman parte de la naturaleza y del significado de los números complejos, pues permitirán el reconocimiento del objeto, como propiedades, relaciones entre los sucesos que lo constituyen, relación con otros objetos, etcétera.

Por lo tanto, un escenario de significación en el contexto de origen estará definido por la funcionalidad que representa los números complejos en determinado contexto y por características de esa funcionalidad que ofrece el contexto. Es decir, los números complejos adquieren una identidad específica fruto de su funcionalidad, entonces buscaremos de hacer emerger los usos y la intencionalidad del escenario de construcción ya que de ello dependerán los significados.

La metodología a emplear para analizar cada uno de los escenarios de significación serán explicados de manera detallada en el siguiente capítulo 3.

2.3.3 PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Una vez expresado lo que son los escenarios de significación para esta investigación, procederemos a realizarnos la pregunta de investigación que guiará nuestro trabajo: ¿Cómo los escenarios planteados, dotan de una significación socio-histórica a los números complejos?

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

"Todos debemos ir engrosando ese pequeño ejército, ¡que el día de mañana se considerará heroico!, mucho más que los que lucharon con las armas en la mano: el ejército de los que un buen día dijeron que había que hacer algo para proteger a una Madre que no se queja, que nos ha dado todo lo que tenemos, ¡y a la que estamos matando!"

Félix Rodríguez de la Fuente

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este apartado procederemos a elaborar, definir y sistematizar el conjunto de técnicas y métodos que seguiremos durante el desarrollo del proceso de investigación que se aplicarán de manera ordenada y sistemática en la realización del estudio. Expondremos el conjunto de técnicas y métodos que emplearán para llevar a cabo las tareas vinculadas a la investigación, es decir, dedicaremos este tercer capítulo a hablar de la metodología de la investigación para otorgarle validez y rigor científico a los resultados obtenidos en el proceso.

En un análisis histórico epistemológico implica según Buendía y Montiel (2012):

> "… no sólo la relatoría de hechos históricos, sino la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean la generación de conocimiento matemático. Es una búsqueda del hacer del hombre en tanto sujeto social, generando y usando el saber matemático en cuestión en situaciones socioculturales específicas para mostrar que dicho conocimiento no está formado por conceptos aislados, sino que es producto del desarrollo de ciertas prácticas" (P. 68-69)

Por lo anterior debemos realizar la búsqueda de las circunstancias socioculturales que rodean al desarrollo histórico-epistemológico de los números complejos, consideramos adecuado usar aspectos metodológicos propuestos por Espinoza.

3.1 ACERCAMIENTO DE ESPINOZA PARA UN ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

Nuestro objetivo es estudiar cómo se hacía matemáticas en desde tres escenarios, conocer qué entendía el autor o los autores por hacer matemáticas, ya que esto nos permite entender el contexto en el que surge el escenario que vamos a analizar. Para lograrlo Espinoza (2009) propone un esquema metodológico que se basa en mirar a una obra matemática desde las condiciones de su producción, sus mecanismos de difusión y su posición en la producción completa del autor

UNA PRODUCCIÓN CON HISTORIA

En este primer momento se pretende entender las circunstancias individuales y colectivas en las cual se produjo una obra y del contexto sociopolítico en el cual se produjo. Es decir, busca entender las condiciones de producción de la obra y las intencionalidades que emerjan de este proceso, para tener elementos que permitan caracterizar la racionalidad involucrada y los medios de significación utilizados por el autor o la época para significar el conocimiento matemático involucrado. Esto es:

- Vida personal
    - ❖ Su cuna (familia)
    - ❖ Su formación
    - ❖ Episodios relevantes de su vida

- Época
    - ❖ Contexto sociopolítico en fechas relevantes
    - ❖ Problemas abordados por la ciencia de la época

- Vida profesional
    - ❖ Carrera académica
    - ❖ Relación con sus colegas
    - ❖ Intereses académicos

UN OBJETO DE DIFUSIÓN

Se busca entender el significado que el autor atribuye a su obra como objeto de difusión ya que esto nos llevara a conocer la intencionalidad. Por ello debemos conocer las intencionalidades y los factores de la difusión, de manera que podamos acercarnos al pensamiento del autor de la obra mediada y además considerar una visión general del periodo histórico.

- Tipo de producción:
    - ❖ Publicación científica
    - ❖ Obra didáctica
    - ❖ Carta entre matemáticos
    - ❖ Ensayos
    - ❖ Etc.

- Medio de difusión
    - ❖ Institución publicadora

- Condiciones del medio de difusión:
    - ❖ Cantidad de páginas
    - ❖ Comité de evaluación
    - ❖ Intencionalidad específica de la obra

PARTE DE UNA EXPRESIÓN INTELECTUAL MÁS GLOBAL

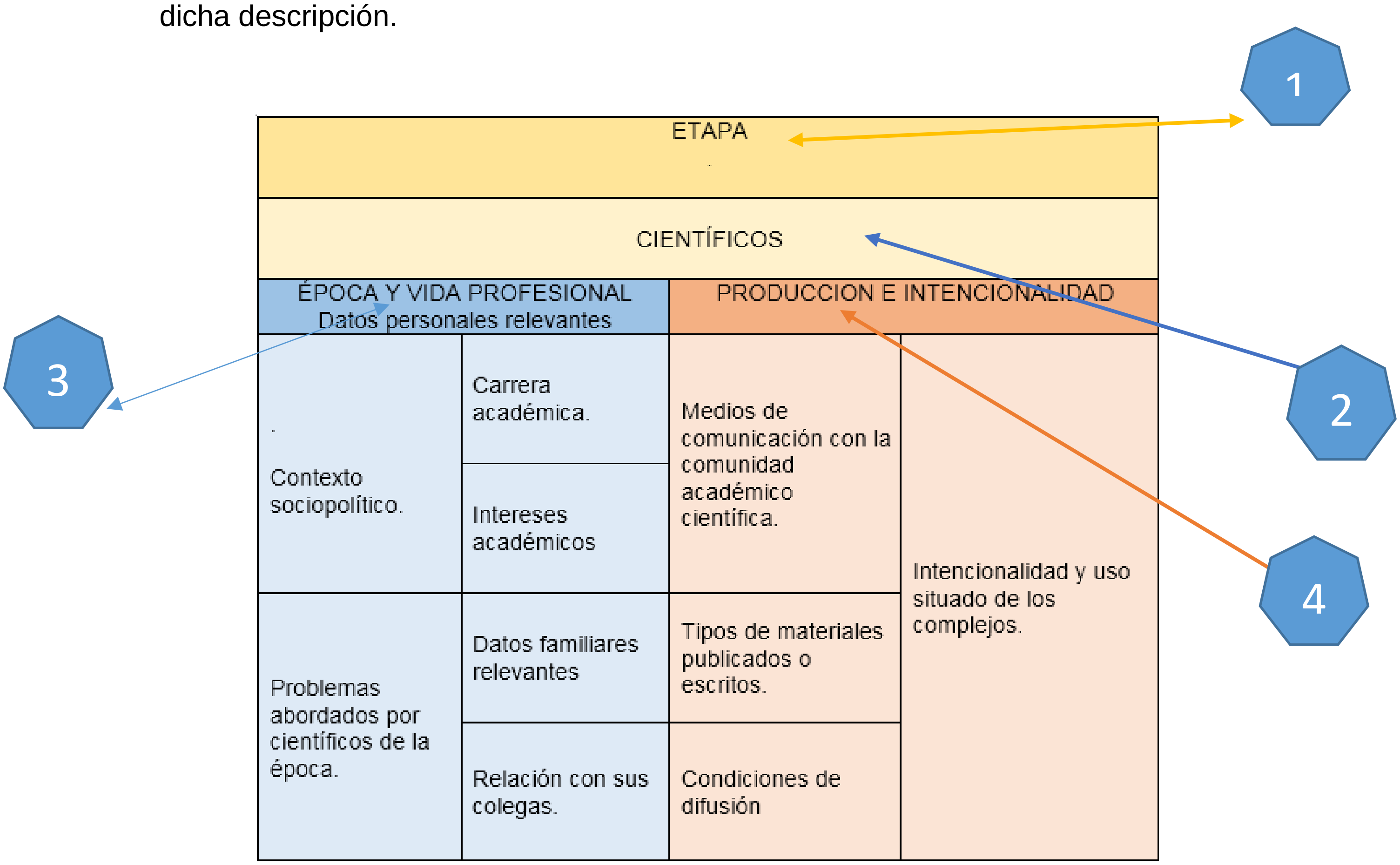
Se interpreta como la producción matemática del autor, en conjunto de las diversas publicaciones sobre la epistemología del conocimiento o sobre temas de actualidad quizás medios alejados a su producción matemática.

- Obras relacionadas a la obra estudiada
- Ensayos de corte epistemológico o metafísico
- Correspondencias entre matemáticos
- Obras relevantes en la producción del autor

Este análisis nos permite entender el contenido matemático, desprender elementos para considerar los medios de significación utilizadas y además para entender la racionalidad involucrada. Es decir, porqué se escribe lo que se escribe.

3.2 MALLA GENERAL

A continuación, presentaremos la estructura general de las mallas que usaremos para describir cada uno de los escenarios de significación. En seguida, tomamos el ejemplo ilustrativo de una malla y asignamos un número a cada bloque para facilitar dicha descripción.



1. Aquí se mencionará qué etapa es la que se trabajará y brevemente describir en qué consiste cada etapa.
2. En este punto mencionaremos quiénes son los científicos principales que hemos decidido analizar con respecto a cada una de las etapas.
3. En este bloque mencionaremos cuáles serán los aspectos relevantes específicos de la vida personal y profesional de cada uno de los matemáticos a analizar.
4. Para este último punto de la malla mencionaremos lo que vamos a analizar respecto a las producciones de los investigadores y ello nos pueda desencadenar cuál era la producción y la intencionalidad de sus trabajos.

3.3 MALLAS DE LOS TRES ESCENARIOS DE SIGNIFICACIÓN

La funcionalidad de esta metodología en el presente trabajo de investigación retoma sólo algunos aspectos metodológicos anexando además la intencionalidad y el uso del objeto matemático, pues analizaremos los escenarios históricos y no necesariamente alguna obra matemática. Los puntos a retomar los mencionaremos a continuación; por ello realizamos las siguientes mallas que nos apoyarán a presentar qué vamos a mostrar en cada uno de los tres escenarios de significación (algebraico, analítico y geométrico).

3.3.1 PRIMER ESCENARIO DE SIGNIFICACIÓN: ETAPA ALGEBRAICA

A continuación, presentamos la primera malla metodológica correspondiente a la etapa algebraica.

<table>
<tr><td colspan="4">ETAPA ALGEBRAICA
Primeras operaciones realizadas con raíces cuadradas de cantidades negativas.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Niccolò Fontana Tartaglia Y Girolamo Cardano.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ÉPOCA Y VIDA PROFESIONAL
Datos personales relevantes</td><td colspan="2">PRODUCCION E INTENCIONALIDAD</td></tr>
<tr><td rowspan="2">.
Contexto sociopolítico.</td><td>Carrera académica.</td><td rowspan="2">Medios de comunicación con la comunidad académico científica.</td><td rowspan="4">Intencionalidad y uso situado de los complejos.</td></tr>
<tr><td>Intereses académicos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Problemas abordados por científicos de la época.</td><td>Datos familiares relevantes</td><td>Tipos de materiales publicados o escritos.</td></tr>
<tr><td>Relación con sus colegas.</td><td>Condiciones de difusión</td></tr>
</table>

3.3.2 SEGUNDO ESCENARIO DE SIGNIFICACIÓN: ETAPA ANALÍTICA

En seguida encontraremos la malla metodológica correspondiente a la etapa analítica.

<table>
<tr><td colspan="3">ETAPA ANALÍTICA
Generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Daniel Bernoulli, Leonhard Paul Euler, René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz y Simón Stevin
.</td></tr>
<tr><td>ÉPOCA</td><td>Vida profesional</td><td>Intencionalidad y uso</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Problemas abordados de los números imaginarios por científicos de la época.</td><td>Datos personales relevantes.</td><td rowspan="2">Intencionalidad y uso específico de los investigadores en la producción de raíces imaginarias para poder entender el porqué de sus declaraciones las cuales con las siguientes:
• Euler: “Como todos los números imaginables son mayores, menores o iguales a cero, entonces es claro que la raíz cuadrada de un número negativo no puede ser uno de estos números, [...] y esta circunstancia nos lleva al concepto de tales números, que por su naturaleza son imposibles y ordinariamente son llamados imaginarios o números falsos, porque solo existen en la imaginación”.
• Descartes interpretaba a los números imaginarios como una señal de que un problema no tenía solución
• Simón Stevin, 1585: “Tiene toda la legitimidad el que uno se ejercite en otras tareas y no pierda el tiempo en inexactitudes”.
• Leibniz no tenía duda sobre la importancia de los números imaginarios. En 1702 escribió: “El Espíritu Santo encontró una salida sublime en esta maravilla del análisis, ese presagio del mundo ideal, ese anfibio entre el ser y no ser, el cual llamamos la raíz imaginaria de la unidad negativa”.</td></tr>
<tr><td>Relación con sus colegas.</td></tr>
</table>

3.3.3 TERCER ESCENARIO DE SIGNIFICACIÓN: ETAPA GEOMÉTRICA

Finalmente presentamos la malla metodológica de la etapa geométrica.

<table>
<tr><td colspan="3">ETAPA GEOMÉTRICA
Primeras construcciones geométricas realizadas con raíces de cantidades negativas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Analizaremos la primera interpretación geométrica ideada por Wallis de los números imaginarios ya que este trabajo fue un gran progreso a la interpretación geométrica de las raíces imaginarias.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ÉPOCA Y VIDA PROFESIONAL</td><td>PRODUCCION E INTENCIONALIDAD</td></tr>
<tr><td>ÉPOCA</td><td>Vida profesional</td><td>Intencionalidad y uso</td></tr>
<tr><td>.
Problemas abordados de los números imaginarios respecto a la interpretación geométrica por científicos de la época.</td><td>Carrera académica.</td><td rowspan="2">Intencionalidad y uso específico de en la primera interpretación geométrica de raíces imaginarias.</td></tr>
<tr><td>Intereses académicos</td><td>Relación con sus colegas.</td></tr>
</table>

CAPÍTULO 4

Análisis histórico-epistemológico hacia los escenarios de significación

"Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad"

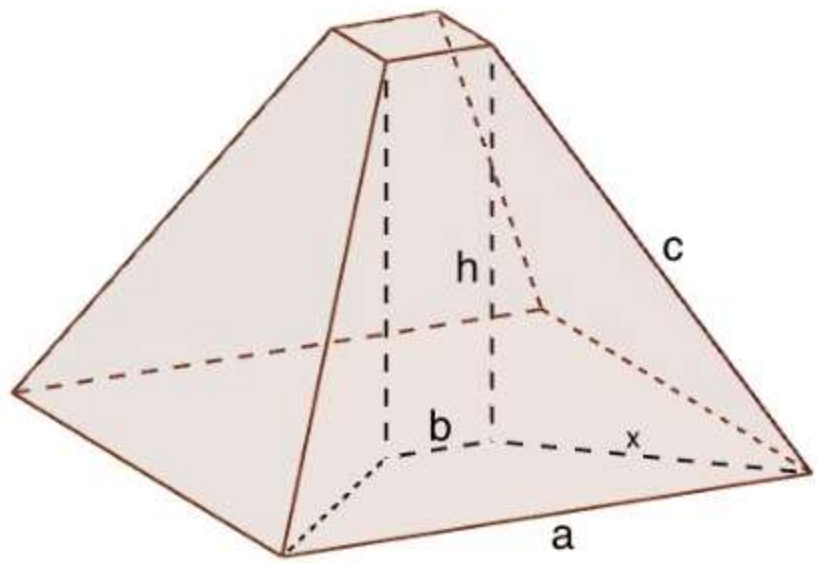
Albert Einstein

5. ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO HACIA LOS ESCENARIOS DE SIGNIFICACIÓN

En este apartado se describe las primeras evidencias escritas de la génesis del significado de las raíces negativas dadas por Herón y Diofanto de Alejandría que posteriormente es usado para la noción de los números complejos:

Herón de Alejandría

Según Maluendas (2019) la evidencia escrita más antigua que se conoce del cálculo de una raíz cuadrada de una cantidad negativa data de aproximadamente del año 75 d. C. Esta apareció en el libro Estereometría, escrito por el griego Herón de Alejandría en el siglo I después de Cristo (d. C). ¿Cómo aparece la raíz cuadrada de una cantidad negativa? Pues bien, Herón de Alejandría quería calcular la altura de una pirámide truncada de base cuadrada como se muestra en la siguiente figura, donde $a = 28$ unidades y $b = 4$ unidades eran las medidas de los lados de los cuadrados inferior y superior, respectivamente, y $c = 15$ unidades era el valor de la arista inclinada.



Usando la fórmula para hallar dicha altura denotada como h, tendríamos entonces que $h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$. Herón también lo conocía esta ecuación y en la solución de su problema, él escribió (usando los términos actuales)

$$h = \sqrt{(15)^2 - \left(\frac{28-4}{2}\right)^2} = \sqrt{125 - 2(144)} = \sqrt{125 - 144 - 144}$$
$$= \sqrt{81 - 144}$$

De la anterior igualdad concluimos que el valor de la altura de la pirámide es $h = \sqrt{-63}$. Sin embargo, en el siguiente paso Herón calculó lo siguiente $h = \sqrt{144 - 81}$, aún se desconoce si fue un error de Herón o de las personas encargadas de transcribir su libro.

Diofanto de Alejandría en el siglo III d. C. encontró en circunstancias muy parecidas, en su obra Aritmética de aproximadamente el año 275 d. C., el autor deseaba encontrar la medida de los lados de un triángulo rectángulo con área 7 unidades cuadradas y perímetro 12 unidades. Sea x y y denotando las medidas de los lados de dicho triángulo rectángulo, entonces el problema se plantea de la siguiente manera en términos algebraicos

$\frac{xy}{2} = 7$ y $x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2$

Despejando en la primer ecuación la variable y y sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado

$$24x^2 - 172x + 336 = 6x^2 - 43x + 84 \quad \dots(*)$$

Si usamos la fórmula general cuadrática concluimos que las soluciones de la ecuación $(*)$ son:

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$$

Sin embargo, Diofanto escribió que la ecuación $(*)$ no podría resolverse a menos que la mitad del coeficiente de x multiplicado por sí mismo, menos 24×336 sea un cuadrado. Obviamente,

$$\left(\frac{172}{2}\right)^2 - 24(336) = -668$$

Para ese momento histórico, esto no podía ser un cuadrado puesto que no podemos encontrar un real tal que su cuadrado sea -668.

Después de Diofanto, tal parece que no era aceptada la posibilidad de que un objeto fuese la raíz cuadrada de una cantidad negativa. Alrededor del año 850 d. C. el matemático hindú Mahaviracarya estableció la siguiente ley para tratar a las raíces de las cantidades negativas en su único libro Ganita Sara Samgraha:

"Como en la naturaleza de las cosas (cantidades) negativas no son cuadrados (cantidades), por lo tanto, no tienen raíz cuadrada".

Así mismo, el conocido matemático y astrónomo hindú Bhaskara Acharia (1114-1185) en su libro Bijaganita escribió:

"...nunca puede haber un cuadrado negativo como se ha demostrado".

4.1 PRIMER ESCENARIO: ETAPA ALGEBRÁICA

Como ya hemos mencionado antes las primeras apariciones de los números complejos se remontan a los tiempos de los griegos y el intento de resolver ecuaciones de segundo grado por métodos geométricos.

Fue entonces hasta que surge el álgebra y el intento de solucionar ecuaciones de tercer grado, cuando se retoman las investigaciones en el campo complejo.

Es importante mencionar que sería incorrecto decir que la aparición de los números complejos se debió a la imposibilidad de resolver todas las ecuaciones cuadráticas, ya que los matemáticos de entonces simplemente no se interesaban en ello. La motivación real de entenderlos, viene de las ecuaciones cúbicas.

Para analizar cómo surgen los números complejos desde el álgebra, haremos una introspección de todo lo acontecido desde el contexto, el uso y la intencionalidad de este primer escenario.

4.1.1. ÉPOCA.

Durante el período del renacimiento fue en Italia cuando por vez primera los algebristas se dedican a investigar seriamente los números complejos y penetran el halo misterioso en que se hallaban envueltos desde la antigüedad.

El Renacimiento es el movimiento cultural que surge en Europa el siglo XIV y XV pero su apogeo es en el siglo XVI, caracterizado por un renovado interés por el pasado grecorromano clásico y especialmente por su arte.

4.1.1.1 Contexto sociopolítico.

El Renacimiento se caracterizó en matemáticas, principalmente por el surgimiento del álgebra y fue una continuación de la tradición medieval.

En la primera mitad del siglo XVI en Italia, en ciudades como Bolonia y Milán los matemáticos celebraban concursos de problemas en las plazas públicas seguidos con pasión por miles de ciudadanos según Martín (2013). Los desafíos empezaban cuando se dejaba un escrito en una puerta de alguna iglesia, a forma de reto y concluían con el enfrentamiento dialéctico de los matemáticos en un acto público seguido por cientos de ciudadanos. Muchos de los problemas matemáticos objeto de disputa estuvieron relacionados con la búsqueda de las soluciones de las ecuaciones algebraicas de tercer y cuarto grado, es decir, aquellas en las que el grado máximo de las variables es tres o cuatro, respectivamente. Durante siglos grandes matemáticos de la talla de Gauss y Euler trataron de dar con una fórmula general para resolverlas y en el camino surgieron conceptos fundamentales como los números complejos y la teoría de grupos.

A diferencia de los matemáticos actuales que construyen su carrera académica publicando sus resultados para obtener un puesto inicial como profesores y luego algún cargo definitivo, en cambio en la época del Renacimiento los matemáticos se parecían más a profesionistas independientes, es decir, ganaban su sustento en los desafíos antes mencionados con otros en competencias públicas con la resolución de problemas, y el ganador se llevaba todo: tal vez premios en metálico, cierta “gloria” y con suerte el apoyo de un acaudalado patrocinador. Las oportunidades de ganar un concurso de ésos estaban claramente relacionadas al conocimiento de cómo resolver problemas que otros no pudieran, por lo que mantener nuevos resultados descubiertos en secreto era el estilo de la época.

4.1.1.2 Problemas abordados por científicos de la época

A continuación, presentamos los avances que se dieron en esta época en las distintas áreas de la matemática.

- Johannes Regiomontanus (1436-1476), natural de Königsberg (hoy día en Alemania), dio la primera presentación sistemática de la trigonometría tanto plana como esférica usando senos y cosenos. Algebraicamente escribía "*res*" para x y "*census*" para el cuadrado.
- El inglés Robert Recorde (1510-1558) fue el primero en utilizar el símbolo $=$ para la igualdad, afirmando que "no puede haber dos cosas más iguales". Por su parte, el alemán Christoff Rudolff empleó en 1525 el símbolo actual de la raíz cuadrada, mientras que el bávaro Adam Ries (1492-1559) publicó libros aritméticos de los que se hicieron más de cien reediciones y estableció definitivamente la utilización de los signos $+$ y $-$.
- El matemático Scipione del Ferro (1465-1526), de la Universidad de Bolonia, descubrió cómo resolver la llamada cúbica reducida, un caso de la cúbica general en el que no está presente el término de segundo grado. Como su solución de la cúbica reducida es un paso clave para el primer avance en la comprensión de $\sqrt{-1}$, es importante entender qué hizo Del Ferro.
  La cúbica resuelta por Del Ferro, por otra parte, tenía la forma general $x^3 + px + q = 0$. Donde p y q son no negativos. Igual que Diofanto, los matemáticos del siglo XVI, incluyendo a Del Ferro, evitaban los coeficientes negativos en sus ecuaciones.

La solución de una ecuación cubica de la forma $x^3 + px = q$ está dada por:

Sea $x = u + v$

$$(u+v)^3 + p(u+v) = q$$

Desarrollamos

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + vp = q$$

$$u^3 + v^3 + 3(u^2v + v^2u) + p(u+v) = q$$

$$u^3 + v^3 + 3(v+u)(uv) + p(u+v) = q$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(v+u) = q$$

Escogemos a $3uv = -p$, entonces

$$u^3 + v^3 = q$$

Como escogimos a $3uv = -p$, de ello sabemos que $v = \frac{-p}{3u}$

$$u^3 + \left(\frac{-p}{3u}\right)^3 = q$$

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} - q = 0$$

Multiplicamos a toda la ecuación por u^3

$$u^6 - u^3 q - \frac{p^3}{27} = 0$$

Resolvemos usando la fórmula general para ecuaciones cuadráticas y obtenemos

$$u^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2}$$

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Entonces

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Análogamente tenemos para v:

$$v^3 = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2}$$

$$v^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Entonces

$$v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Dada la simetría un signo pertenece a u y otro a v

Por lo tanto como $x = u + v$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

De esta manera llegaban a la solución de ecuaciones cúbicas, puede parecer muy extenso, pero es mucho más simple que muchas fórmulas algebraicas.

Estos resultados eran un triunfo matemático, la culminación de una historia que había abarcado milenios. No obstante, había tenía un pequeño detalle, a veces el método funcionaba de manera brillante, pero en otras veces la fórmula se comportaba tan enigmática como misteriosa, ya que se encontraba con raíces negativas.

- Fórmula algebraica para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado que fue publicado en 1545 por el matemático italiano Gerolamo Cardano en su Ars magna. Basada en estudios de Fibonacci que ya observa que algunas ecuaciones de tercer grado no tenían raíces racionales.
- Tartaglia, apodo de Niccolo Fontana, porque era tartamudo, demostró que algunas ecuaciones de tercer grado se podían resolver con una fórmula.

4.1.2. VIDA PROFESIONAL: Datos personales relevantes.

4.1.2.1 Carrera académica.

- Cardano: abogado de Milán y profesor de Geometría en la Universidad de Pavia. Catedrático de Medicina en su ciudad natal en 1543 y en Bolonia en 1562. Sus trabajos en astrología incluyeron un horóscopo de Cristo. Autor de más de 200 tratados, los más famosos fueron su Ars Magna en 1545 con las primeras soluciones publicadas de ecuaciones de tercer y cuarto grado y el Liber de ludo aleae que contiene algunos de los primeros trabajos sobre probabilidad. Cardano llamaba a los números negativos "falsos", pero en su "Ars Magna" los estudió exhaustivamente.

  Algunas obras publicadas son las siguientes:
  - De malo recentiorum medicorum usu libellus, 1536
  - Practica arithmetice et mensurandi singularis, 1539
  - De consolatione, 1542
  - De sapientia, 1544
  - Artis magnae, sive de regulis algebraicis, 1545
  - De immortalitate animorum, 1545

- Liber somniorum, 1562
- Contradicentium medicorum, 1536
- In Cl. Ptolemaei... Quadripartitae Constructionis libros Commentaria, 1554
- De subtilitate rerum, 1550
- Liber de libris propriis, 1557
- De varietate rerum, 1557
- Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, ponderum, sonorum, aliarumque rerum mensurandarum. Item de alia regula, 1570
- De propia vita, 1643
- Metoposcopia, 1658
- Theonoston, 1663
- Prosseneta
- Liber de ludo aleae

➢ Tartaglia: Fue inventor del método de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas y de tercer grado. Otras aportaciones destacables de Tartaglia fueron los primeros estudios de aplicación de las matemáticas a la artillería en el cálculo de la trayectorias de los proyectiles (trabajos confirmados posteriormente por los estudios acerca de la caída de los cuerpos realizados por Galileo), así como por la expresión matemática para el cálculo del volumen de un tetraedro cualquiera en función de las longitudes de sus lados, la llamada fórmula de Tartaglia, una generalización de la fórmula de Herón (usada para el cálculo del área del triángulo). Además de sus trabajos matemáticos, Tartaglia publicó las primeras traducciones al italiano de las obras de Arquímedes y Euclides.

  También escribió un libro sobre teoría de números en el que pueden encontrarse entretenidos rompecabezas, por ejemplo:

  - *Tres matrimonios (en los cuales los maridos son extremadamente celosos) quieren cruzar un río en una barca en la que caben como máximo dos personas. Determinar cómo debe planificarse el cruce si no puede dejarse a ninguna mujer en compañía de un hombre a menos que su marido esté presente.*
  - *Tres personas quieren repartirse el aceite que hay en una garrafa de 24 litros. Determinar cómo puede hacerse el reparto*

si se dispone de tres garrafas vacías con capacidades conocidas de 5, 11 y 13 litros.

Algunas obras de Tartaglia son las siguientes:

- Trattato di numeri et misure.
- Nuova Scientia, cioè invenzione nuovamente trovata utile per ciascuno speculativo matematico bombardero et altri (1546).
- Questi et invenzioni diverse.
- La travagliata invenzione.
- Trattato di aritmética.

4.1.2.2 Intereses académicos.

- Cardano: Según Riviera (2001) Para Cardano el juego se convirtió en una adicción que duró muchos años y le hizo perder mucho tiempo valioso, dinero y reputación. También fue un ardiente astrólogo, llevaba amuletos y predecía el futuro durante las tormentas. En 1570 fue encarcelado acusado de hereje por realizar el horóscopo de Jesucristo y escribir el libro "En homenaje a Nerón" odia emperador anticristiano. Después de algunos meses es liberado perdiendo su posición como profesor y su derecho a publicar libros. Se trasladó a Roma como astrólogo papal donde redactó su autobiografía que terminó una semana antes de su muerte.

  También publicó Liber de ludo aleae, que contiene algunos de los primeros trabajos sobre probabilidad, en los que aprovechó su experiencia como jugador y una autobiografía extremadamente franca, De propria vita, que adquirió cierta fama. Hay una leyenda que mantiene que mediante la astrología predijo el día de su muerte, el 21 de septiembre de 1576, y que se suicidó para hacer correcta la predicción.

  Pero Cardano ha pasado a la historia porque se apropió de los resultados de Tartaglia y de Nicolo Ferrari, los descubridores de la solución de la ecuación cúbica y cuártica, publicándolos antes que ellos.

- Tartaglia: En 1537 publicó un libro sobre balística en el cual postulaba correctamente que todo proyectil tiene alcance máximo cuando se dispara con un ángulo de 45 grados, pero no dio la demostración de este hecho.

  Tartaglia escribió un libro sobre Teoría de números en el que pueden encontrarse entretenidos rompecabezas.

4.1.2.3 Datos familiares relevantes.

- Cardano: comenzó como asistente de su padre, que le enseñó Matemática.

Girolamo Cardano
(1501-1576)

Pero él aspiraba a más y empezó a pensar en hacer una carrera. Aunque su padre quería que estudiara derecho, Cardano ingresó a la Universidad de Pavia a estudiar medicina, estudios que luego debió continuar en la Universidad de Padua por la guerra. Cardano se graduó de médico en 1525. Malgastó lo que recibió de su padre y se dedicó al juego para mejorar sus finanzas (dados, cartas, ajedrez), del cual hizo un medio de vida ya que habitualmente era más lo que ganaba que lo que perdía. En este ambiente estuvo rodeado de gente de dudosa reputación.

Aunque, en varias ocasiones, Cardano había sido profesor de matemáticas de las universidades de Milán, Pavia y Bolonia, teniendo que renunciar de todas ellas por algún escándalo. Al regresar de Escocia era un importante profesor de Medicina en la Universidad de Pavia y con muchos pacientes adinerados, se transformó en un hombre rico y afortunado. En 1546, murió su mujer Lucía y se transformó en rector del Colegio de Médicos de Milán. Su mujer murió a la edad de 31 años, dejando a Cardano con dos hijos y una hija. De ellos, el mayor, Giambattista estudió medicina y parecía tener un brillante porvenir.
Giambattista se casó y su mujer tuvo tres hijos, ninguno de los cuales resultó ser de su marido. Parece ser que por ello Giambattista le preparó un pastel con arsénico y ella murió. Giambatista fue encarcelado, torturado y finalmente ejecutado el 13 de abril de 1560, ya que Cardano no pudo pagar la suma de dinero que te exigían para salvar a su hijo.
Todo esto afectó mucho a Cardano. Con su otro hijo tampoco tuvo consuelo, fue un criminal y estuvo en prisión muchas veces por ello. En 1562 abandonó Milán, la ciudad de sus triunfos y tragedias, siendo profesor de medicina en la universidad de Bolonia.

- Tartaglia: Su verdadero nombre era Fontana, pero fue apodado Tartaglia por su tartamudez, cuando tenía doce años, las tropas francesas al mando de Gastón de Foix tomaron la ciudad de Brescia. Niccolò Fontana, a pesar de estar refugiado en la catedral, recibió varias heridas, una de ellas en la boca. Las secuelas de esta herida le causaron la tartamudez que dio origen al sobrenombre Tartaglia (tartamudo) con el que llegó a firmar sus obras. Su cara quedó desfigurada, lo cual lo obligó siempre a usar barba para disimular sus cicatrices.

  Huérfano de padre (pues murió en la masacre) y sin medios materiales para proveerse una instrucción formal, se cuenta que Tartaglia solo aprendió la mitad del alfabeto (exactamente hasta la letra k) de un tutor privado antes de que el dinero se agotara, y, posteriormente, tuvo que aprender el resto por su cuenta. Sea como fuere, su aprendizaje fue esencialmente autodidáctico

  Hijo de una viuda pobre, fue autodidacta desde los 14 años, edad en la que aprendió a escribir. Estudió por si solo griego, latín y matemática, disciplina con la cual, debido a su habilidad, pudo ganarse la vida enseñando en Verona hasta que en 1534 se traslada a Venecia donde muere, en la misma pobreza que le acompañó toda su vida.

4.1.2.4 Relación entre colegas.

En el estudio de las ecuaciones cúbicas tenemos como protagonistas principales a Niccolo Fontana, Tartaglia, Girolamo Cardano, Scipione del Ferro, Ludovico Ferrari y como actor secundario a Antonio María del Fiore.

En la década de los 30, llega a oídos de Tartaglia que un tal del Fiore posee un método para resolver ecuaciones cúbicas. En una época como aquella, en la que el interés por el álgebra estaba creciendo de manera significativa entre los matemáticos en Europa, poseer un método para resolver estas ecuaciones resultaba valiosísimo. Por ello, intrigado por la posibilidad de que dicho método pudiera existir, entonces él se puso a trabajar en el tema de forma autodidacta encontrando tal método un tiempo después.

En aquella época, como ya hemos mencionado antes era habitual organizar desafíos entre matemáticos en los que cada uno proponía problemas que el otro tenía que resolver. A raíz del trabajo de Tartaglia, se organizó un desafío que enfrentara a Del Fiore, los resultandos arrojaron a Tartaglia como ganador de manera aplastante (resolvió todos los problemas propuestos por Del Fiore, mientras que este no fue capaz de resolver ninguno de los que le tocaron).

De esta aplastante victoria de Tartaglia tuvo conocimiento Cardano, el cual intenta convencerlo para que le revele el método que había descubierto y así poder publicarlo en su obra Ars Magna, que estaba preparando en aquellos años. Pidió al librero Zuantonio da Bassano que era conocido de ambos que se entrevistara con Tartaglia en Venecia, encomienda que llevó a cabo el 2 de enero de 1539. En este encuentro le pidió en nombre de un hombre respetable médico de Milán, llamado Messer Gerolamo Cardano que le contara la forma de resolver las ecuaciones cubicas para publicarla en su libro, dando créditos a Tartaglia como autor. La respuesta fue negativa: “Dile a su Excelencia que deberá disculparme, pero que cuando decida hacer pública mi invención será en mi propia obra y no a través de la de otros”.

Por otra parte, Tartaglia también rechazó darles las respuestas a los 30 problemas de Del Fiore, proporcionándole únicamente las preguntas que éste le había propuesto en la disputa (que, por otra parte, podían ser obtenidos por cualquier persona pidiéndolas al notario, ya que eran públicas).

Cardano volvió a insistir y el 12 de febrero le escribió una carta a Tartaglia mandándole comentarios de elogio sobre su libro la Nuova Scientia y reiteró sus peticiones. Tartaglia continuó imperturbable, aunque esta vez aceptó resolver dos de los problemas propuestos por Cardano. Al mes siguiente, el 13 de marzo, Cardano volvió a enviar una nueva carta, esta vez cambiando su estrategia, le invitaba en ella a pasar unos días con él en Milán y expresaba interés por sus instrumentos de artillería. Además, argumentaba que si aceptaba la invitación tendría mucho gusto en poder presentarle a Alfonso de Ávalos (1502-1546) Marqués del Vasto en el castillo de la vecina localidad de Vigevano, en donde Del Vasto era un noble español y un militar de cierto prestigio.

Esta oportunidad era valiosa para Tartaglia ya que podría mostrarle al Marqués sus estudios e invenciones en el campo de la artillería, de los que el mismo Cardano ya le había hablado. Esta última propuesta debió de interesar a Tartaglia, que finalmente decidió aceptar la invitación y acudir a Milán, este encuentro fue en la casa de Cardano el 25 de marzo de 1539.

Las presiones de Cardano sobre Tartaglia durante la breve estancia de éste en Milán debieron ser grandes, de tal manera que en el escrito de Martín (2013), relata los hechos ocurridos en la versión de Tartaglia:

> ***Tartaglia:*** *Te digo: he rechazado tu petición no por causa de este capítulo y de los descubrimientos que en él se encuentran, sino por las cosas que pueden ser descubiertas conociéndolo, puesto que es la llave que abre el*

camino para numerosas otras áreas. Yo mismo habría encontrado una regla general para muchos otros problemas, si no estuviera ocupado en la traducción de Euclides a la lengua nacional (hasta el momento he llegado en mi traducción hasta el Libro XIII). Pero cuando esta tarea que ya he empezado, esté acabada, planeo publicar una obra sobre su aplicación práctica junto con una nueva álgebra... Si se la diera a un teórico, como vuestra Excelencia, él podría fácilmente encontrar otros capítulos, con la ayuda de esta explicación (ya que es fácil aplicar la explicación a otras cuestiones) y publicar los frutos de mi descubrimiento bajo otra autoría. Esto acabaría con todos mis planes.

Cardano: *Juro por los Santos Evangelios y por mi fe como caballero no hacer públicos tus descubrimientos, si me los cuentas; del mismo modo prometo y aseguro por mi fe de buen cristiano que los escribiré en cifra, de manera que nadie que los lea tras mi muerte y pueda comprenderlos. Si yo, en opinión vuestra soy un hombre honesto, contádmelo y, si no es así, demos entonces por terminada esta conversación.*

Tartaglia: *Si no confiara en un juramento como el vuestro, entonces, desde luego, yo mismo merecería ser considerado un ateo.*

Finalmente, Tartaglia cedió a comunicar su fórmula.

Por otro lado, Fiore conocía el método de resolución porque Scipione del Ferro, profesor suyo, se lo había comunicado años antes. Es decir, Del Ferro fue el primero (que se sepa) que creó un método de resolución para una cúbica. En 1542, Cardano y Ferrari viajan a Bolonia en busca de los trabajos hechos por Del Ferro y es Della Nave (yerno de Del Ferro) quien se los proporciona.

Al verlos, Cardano comprueba que el método de del Ferro para resolver la cúbica $x^3 + px = q$ era el mismo que el de Tartaglia, por lo que entiende que la promesa que le había hecho este de no publicar su descubrimiento ya no tiene validez. Cardano publica el método de Del Ferro en Ars Magna en 1545, y Tartaglia entra en cólera. Aunque Cardano lo nombra varias veces en su obra, Tartaglia se siente traicionado.

Tartaglia responde publicando un año después un libro con su método y con ataques a Cardano. Este no responde a dichos ataques, pero sí lo hace Ferrari. Este enfrentamiento acaba con un nuevo “duelo matemático” entre Tartaglia y Ferrari que se convierte en un auténtico fenómeno social. Durante el duelo se produce una discusión por uno de los problemas de Ferrari que Tartaglia no había resuelto alargando la sesión hasta la hora de la cena, quedando interrumpida hasta el día siguiente. A esta nueva sesión Tartaglia no se presentó, por lo que Ferrari debió ser proclamado ganador. Más tarde Tartaglia escribiría que el acoso de la multitud, favorable al contrincante local influyó en el resultado.

La historia termina el día 11 de agosto de 1548. Estaba amaneciendo, Niccolò Tartaglia subido en una burra de poca alzada, dejaba a sus espaldas Milán en dirección oeste hacia Brescia, su ciudad natal.

4.1.3 PRODUCCIÓN E INTENCIONALIDAD

En este apartado en el tema 4.1.3.1 se describen los medios de comunicación con la comunidad académico científica, tipos de materiales publicados o escritos y condiciones de difusión; en el tema 4.1.3.2 describiremos cuál era la intencionalidad y el uso situado de los números complejos.

4.1.3.1 Medios de producción y difusión de escritos académicos

Iniciaremos con la descripción de la redacción del libro Ars Magna (cuyo título completo es Artis Magnae sive de regulis algebraicis, es decir, Del Gran Arte, o de las reglas algebraicas) escrito por Cardano en 1545 vio la luz en una imprenta de Nuremberg. En esta obra aparecía el capítulo 1 del cubo, los otros dos capítulos eran referentes a las ecuaciones de tercer grado reducidas y otros 10 más hasta un total de 13, que cubrían todas las formas posibles en las que una ecuación cúbica podía presentarse. Además, se incluía la solución para las ecuaciones de cuarto grado descubierta por Ferrari reduciéndola mediante una cierta estrategia a una ecuación de tercer grado. El conjunto de los avances que este libro aportaba era incalculable.

Un año más tarde, en Venecia y a sus expensas, lo que demuestra su impaciencia, Tartaglia publicó un nuevo libro, Quesiti ed inventioni diverse (1546). En este libro vuelve a aparecer ese personaje misterioso descrito por Cardano y que había intentado antes que él hacerse con la fórmula de Tartaglia sin éxito, nos referimos a Zuanne di Tonini da Coi es el interlocutor del diálogo del Libro IX, dialogando con Tartaglia cuenta su versión de los hechos, Da Coi le hace preguntas y Tartaglia argumenta sobre ellas, también reproduce Tartaglia las cartas intercambiadas sobre este asunto con Cardano. No obtuvo ninguna respuesta de Cardano.

El argumento de esta historia vuelve a reanudarse el 10 de febrero de 1547. Tartaglia por fin obtuvo respuesta a sus quejas, pero no de Cardano sino de Ludovico Ferrari. Y esta respuesta le llegó por medio de un cartel. Los carteles eran una especie de carta pública, impresa y distribuida a todos los que en el asunto tuvieran algo que ver, o que opinar. Ferrari envió este primer cartel no sólo a Tartaglia, sino a todos los matemáticos conocidos del momento, la imprenta venía así a jugar un nuevo papel en la historia de la ciencia, contribuyendo a la difusión de estos documentos a caballo entre el panfleto y el prospecto publicitario. En su cartel, Ferrari no sólo no se defendía de las acusaciones contra Cardano hechas por Tartaglia, sino que pasaba directamente al ataque. Acusaba a Tartaglia de haber plagiado partes de su libro, señalaba múltiples defectos de la obra, y le acusaba de tener mala memoria a la hora de recordar lo sucedido con la promesa de no revelar la solución de ecuaciones cúbicas.

Los carteles finalmente fueron doce, seis de Ferrari y seis respuestas de Tartaglia, y aparecieron a lo largo de un año y medio. Tartaglia dirigía todas sus respuestas a ambos, Cardano y Ferrari. En el que lleva la fecha de 21 de abril de 1547, Tartaglia enviaba una lista de treinta y un problemas para que su contrincante los resolviera. En el cartel de respuesta, fechado el 24 de mayo Ferrari le enviaba otros treinta y un problemas.

El último de los carteles lleva la fecha de 24 de julio de 1548, en él Tartaglia aceptaba definitivamente las condiciones del duelo, el lugar y los jueces, junto con la fianza que cada uno debía abonar como garantía. Éste tuvo lugar en la tarde del 10 de agosto de 1548 en Milán, en la iglesia de Santa María del Giardino de la Orden de los Frailes Menores Observantes. Cada uno de los contrincantes presentó sus respuestas a los problemas planteados por el otro.

4.1.3.2 Intencionalidad y uso situado de los números complejos.

La obra Ars Magna publicada por Cardano proporciona métodos para solucionar ecuaciones cúbicas que junto con x y x^2 también involucran el cubo de una incógnita x^3 y ecuaciones de cuarto grado x^4.

Usando los símbolos que usamos actualmente podemos escribir la solución de Cardano para las ecuaciones cúbicas en un caso especial cuando tenemos $x^3 + ax + b = 0$ donde a y $b \in \mathbb{R}$. Si en dado caso x^2 se encontrara presente podemos librarnos de él, de modo que este caso en realidad es válido para todos casos; analicemos cómo llegaron a este resultado:

Sea $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Dividimos a toda la ecuación entre A y tenemos

$$x^3 + \frac{B}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0$$

Renombramos a las literales de la siguiente manera: $a = \frac{B}{A}, b = \frac{C}{A}, c = \frac{D}{A}$ y la ecuación quedaría:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Por estrategia tomemos $x = z - \frac{a}{3}$

$$(z - \frac{a}{3})^3 + a(z - \frac{a}{3})^2 + b(z - \frac{a}{3}) + c = 0$$

Desarrollamos:

$$z^3 - 3z^2\frac{a}{3} + 3z\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z^2 - 2z\left(\frac{a}{3}\right) + \frac{a^2}{9}\right) + bz - \left(\frac{a}{3}\right)b + c = 0$$

$$z^3 - az^2 + \frac{1}{3}za^2 - \frac{a^3}{27} + az^2 - \frac{2}{3}a^2z + \frac{a^3}{9} + bz - \left(\frac{a}{3}\right)b + c = 0$$

$$z^3 - \frac{1}{3}za^2 - \frac{a^3}{18} + bz - \left(\frac{a}{3}\right)b + c = 0$$

Agrupamos de la siguiente manera

$$z^3 + \left(-\frac{1}{3}a^2 + b\right)z + \frac{1}{27}(-2a^3 - 9ab + 27c) = 0$$

Tomemos $p = -\frac{1}{3}a^2 + b$ y $q = -2a^3 - 9ab + 27c$

Y obtenemos

$$z^3 + pz + q = 0$$

De esta manera demostró que cualquier ecuación de la forma $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ podemos hacerla equivalente a una de la forma $x^3 + ax + b = 0$.

Y usando el método empleado por Del Ferro llegaba a mostrar que la solución de una ecuación cúbica $x^3 + px + q = 0$ estaba dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Con ello llegaban a la solución de ecuaciones cúbicas, puede parecer muy extenso, pero es mucho más simple que muchas fórmulas algebraicas.

Estos resultados eran un triunfo matemático, la culminación de una historia que había abarcado milenios. No obstante, había tenía un pequeño detalle, a veces el método funcionaba de manera brillante, pero en otras veces la fórmula se comportaba tan enigmática como misteriosa, ya que se encontraba con raíces negativas.

Un problema planteado por Cardano en su trabajo es el siguiente:

Si alguien te pide dividir 10 en dos partes cuyo producto sea... 40, es evidente que esta cuestión es imposible. No obstante, nosotros la resolvemos de la siguiente forma.

Cardano aplicaba entonces su algoritmo al sistema de ecuaciones $x + y = 10$, $xy = 40$ dando como soluciones $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$. Por multiplicación probaba Cardano que el producto era 40. Esta es la primera constancia escrita de la raíz de un número negativo y de su manejo algebraico

Cuando Cardano aplicaba la formula a la ecuación $x^3 - 15x - 4 = 0$, el resultado se expresa como:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Esta expresión parecía no tener ningún significado pues -121 no tiene raíz cuadrada. Para hacer más grande este misterio, hay una solución obvia $x = 4$ pero la ecuación no nos la da. Entonces Cardano muy intrigado escribió a Tartaglia para pedirle alguna aclaración, pero como era de esperarse no recibió respuesta alguna.

Cardano hizo uso por vez primera de las raíces cuadradas de números negativos y consideró la posibilidad de usar los números imaginarios, aunque con mucha cautela.

En una nueva edición de su libro, en 1570, Cardano se adentra un poco más en el misterio de estos números y da algunas reglas para manipularlos.

DISCUSIÓN

Las ideas matemáticas revolucionarias rara vez se descubren en los contextos más simples y más obvios. Casi siempre surgen de algo mucho más complicado. Así sucedió con la raíz cuadrada de menos uno. Hoy día, lo habitual es introducir este número en términos de la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, cuya solución es la raíz cuadrada de menos uno, cualquier cosa que esto signifique. Como ya hemos mencionado, entre los primeros matemáticos en preguntarse si esto tenía un sentido razonable estaban los algebristas del Renacimiento, que tropezaron con las raíces cuadradas de números negativos de una manera sorprendentemente indirecta: la solución de ecuaciones cúbicas.

El contexto en el que surge estos nuevos números hace referencia a competencias matemáticas llevadas a cabo en plazas públicas donde dichos encuentros eran seguidos por la ciudadanía. Donde la intencionalidad de su surgimiento fue el hecho de resolver una ecuación cúbica las cuales se encontraban en el centro de atención de los matemáticos ya que buscaban una manera general de poder resolver dichas ecuaciones. Este método fue originalmente descubierto por Del Ferro, posteriormente generalizado por Tartaglia y finalmente publicado por Cardano en su obra Ars Magna.

Todo esto se desarrolló en la época del Renacimiento donde el álgebra y la geometría se encontraban en su máximo esplendor, la época nos da cuenta por ejemplo el por qué no figura ninguna mujer matemática, además de conocer el contexto social y político en los cuales se llevaron a cabo las publicaciones de distintas obras. Claramente la disputa de la ecuación cúbica la gana Cardano pues era un matemático de renombre y con un status social alto.

Así mismo el conocer su vida personal y profesional nos hace ver a través de sus ojos la realidad en la que se encontraban inmersos cada uno de los investigadores, Cardano era un hombre con vicios y viudo mientras que Tartaglia al quedar tartamudo pierde muchas oportunidades en todos los ámbitos y eso lo conlleva a nacer y morir pobre, lo cual lo imposibilita de poder publicar los resultados de sus descubrimientos.

Su origen y la valoración inicial que merecen estos nuevos números a los matemáticos de la época: útiles como artificios de cálculo, pero sin ninguna significación real. Hay que decir que la necesidad de resolución de estas ecuaciones no vino impulsada por ninguna exigencia de tipo práctico, fue más bien un interés teórico.

Sin duda, el tener el acercamiento a estos números no únicamente desde el descubrimiento, sino desde todo lo que rodeó y forjó el surgimiento de las raíces negativas, nos permite sensibilizarnos de la realidad y no dar por trivial un hecho que llevó años en forjarse y que únicamente era el inicio del surgimiento de lo que hoy en día conocemos como números complejos.

ESCENARIO DE SIGNIFICACIÓN

ETAPA ALGEBRAICA Primeras operaciones realizadas con raíces cuadradas de cantidades negativas.			
Niccolò Fontana Tartaglia Y Girolamo Cardano.			
ÉPOCA Y VIDA PROFESIONAL Datos personales relevantes		PRODUCCION E INTENCIONALIDAD	
.**Contexto sociopolítico**. Fue en Italia, durante el período del renacimiento, cuando por vez primera los algebristas se dedican a investigar seriamente los números complejos. El renacimiento se caracterizó en	**Carrera académica.** Cardano: abogado de Milán, y profesor de Geometría en la Universidad de Pavia. Catedrático de Medicina. Sus trabajos en astrología incluyeron un horóscopo de Cristo. Autor de más de 200	**Medios de comunicación con la comunidad académico científica.** Carteles, libros y correspondencia.	**Intencionalidad y uso situado de los complejos**. La obra Ars Magna publicada por Cardano proporciona métodos para solucionar ecuaciones cúbicas que junto con x y x^2 también involucran el cubo de una incógnita x^3, y ecuaciones de cuarto grado x^4. Estos resultados eran un triunfo matemático,

matemáticas, principalmente por el surgimiento del álgebra y fue una continuación de la tradición medieval. En la primera mitad del siglo XVI en Italia, en ciudades como Bolonia y Milán los matemáticos celebraban concursos de problemas en las plazas públicas seguidos con pasión por miles de ciudadanos	tratados, los más famosos fueron su Ars Magna, (1545). Tartaglia: Fue inventor de un método, cómo la fórmula para ecuaciones cuadráticas, para resolver ecuaciones de tercer grado. Otras aportaciones de Tartaglia fueron los primeros estudios de aplicación de las matemáticas a la artillería en el cálculo de la trayectorias de los proyectiles		la culminación de una historia que había abarcado milenios. No obstante, había tenía un pequeño detalle, a veces el método funcionaba de manera brillante, pero en otras veces la fórmula se comportaba tan enigmática como misteriosa, ya que se encontraba con raíces negativas.
	Intereses académicos Tartaglia escribió un libro sobre Teoría de números en el que pueden encontrarse entretenidos rompecabezas matemáticos. Para Cardano el juego se convirtió en una adicción que te duró muchos años y te hizo perder mucho tiempo valioso, dinero y reputación. También fue un ardiente astrólogo, llevaba		

	amuletos y predecía el futuro durante las tormentas.		
Problemas abordados por científicos de la época. El matemático Scipione del Ferro descubrió cómo resolver la llamada cúbica reducida, un caso de la cúbica general en el que no está presente el término de segundo grado. La cúbica resuelta por Del Ferro, por otra parte, tenía la forma general $x^3 + px + q = 0$. Donde p y q son no negativos. Igual que Diofanto, los matemáticos del siglo XVI, incluyendo a Del Ferro, evitaban los coeficientes negativos en sus ecuaciones.	**Datos familiares relevantes** En 1546, murió su mujer Lucía y se transformó en rector del Colegio de Médicos de Milán, al cual tanto te costó ingresar. Su mujer murió a la edad de 31 años, dejando a Cardano con dos hijos y una hija. Su verdadero nombre era Fontana, pero fue apodado Tartaglia por su tartamudez, cuando tenía doce años, las tropas francesas al mando de Gastón de Foix tomaron la ciudad de Brescia	**Tipos de materiales publicados o escritos.** La redacción de Ars Magna (cuyo título completo es Artis Magnae sive de regulis algebraicis, es decir, Del Gran Arte, o de las reglas algebraicas) escrito por Cardano en 1545 vio la luz en una imprenta de Nuremberg.	
	Relación con sus colegas. Cardano publica su obra Ars Magna, donde expone los métodos para la resolución de la ecuación cúbica. Tartaglia monta en cólera y acusa a Cardano	**Condiciones de difusión** En esta obra aparecía el capítulo del cubo y las cosas igual al número, los otros dos capítulos contenidos en los versos de Tartaglia, referentes a las ecuaciones de tercer grado reducidas y otros 10	

	de traidor y deshonesto, por haber faltado a su juramento. Sin embargo, un joven matemático de apenas 18 de edad, Ludovico Ferrari , quien era sirviente de Cardano, sale en defensa de su protector diciendo que él estuvo presente la noche de la reunión entre los dos matemáticos y no hubo ningún juramento. En realidad, la fórmula para resolver la ecuación cúbica, había sido descubierta mucho antes por el matemático Scipione del Ferro. Luego Cardano quedaba libre de toda culpa.	más hasta un total de 13, que cubrían todas las formas posibles en las que una ecuación cúbica podía presentarse. Además, se incluía la solución para las ecuaciones de cuarto grado descubierta por Ferrari, reduciéndola, mediante una cierta estrategia, a una ecuación de tercer grado. El conjunto de los avances que este libro aportaba era incalculable.	

4.2 SEGUNDO ESCENARIO: ETAPA ANALÍTICA.

En 1572 Bombelli publicó *L´Algebra*, su objetivo principal era poder clarificar el libro de Cardano. Lo que hizo Bombelli según Bagazgoitia (2007) para solucionar la ecuación $x^3 - 15x - 4 = 0$ en la cual obteníamos como resultado $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, fue operar con estos números ignorando lo que signifique las raíces negativas y operando como si fueran números ordinarios y respetando las reglas del álgebra, mostrando lo siguiente:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2+\sqrt{-121}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$$

De manera análoga:

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

Ahora esta fórmula que tanto había intrigado a varios matemáticos como Cardano podía reescribirse como:

$$x = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right) = 4$$

Con lo cual las raíces negativas que tanto problema habían causado se estaban anulando. De esta manera los cálculos con toda formalidad, pero carentes de sentido realizados por Bombelli conseguían una respuesta correcta, lo cual era un número real perfectamente normal, por todo ello podemos nombrar a Bombelli como el padre de los números complejos ya que fue el primero en desarrollar el álgebra para operar con estos números.

Este extraño método daba la respuesta correcta, pero llegaba a esto manipulando las llamadas cantidades imposibles. Estos cálculos hacían notar que esas raíces negativas podían usarse para el cálculo de soluciones que si existían.

La idea de Bombelli consistía en reducir a estos números como unos de la forma $a + bi$. En el libro *L'Algebra*, aparecen por vez primera el cálculo con los números negativos, así como también las reglas para sumar y multiplicar dichos números. El gran aporte de Bombelli al álgebra, fue el de aceptar sin reserva la existencia de $\sqrt{-1}$, como un número. A manera de ejemplo, Bombelli nos da las siguientes reglas:

$$\sqrt{-n} \cdot \sqrt{-n} = -n$$

$$\sqrt{-n} \cdot -\sqrt{-n} = -n$$

siendo n un número natural.

A pesar de lo aportado por Bombelli, su trabajo sobre esta materia (*L'Algebra*) fue ampliamente ignorado y considerado como misterioso e incierto.

El nombre de números imaginarios lo dio, René Descartes, que se oponía a las teorías de Bombelli. Otro investigador que también se oponía era Simón Stevin. Por otro lado Euler fue quien denominó i a la unidad imaginaria, doscientos años después, en 1777 y Leibniz decía de los números imaginarios que eran "una especie de anfibios entre el ser y la nada".

4.2.1. Problemas abordados por científicos de la época

En este apartado describimos el segundo escenario que corresponde a la etapa analítica dada en la época del Renacimiento entre los años de 1572 a 1673 (en 1572 fue la fecha de publicación del libro *L'Algebra de Bombelli* y en 1673 la publicación del libro *A treatise of algebra, both historical and practical* libro escrito por Wallis, donde se da una de las primeras interpretaciones geométricas de los números complejos).

Por lo tanto, algunos de los problemas abordados por los científicos de la época fueron los siguientes:

- El inglés Thomas Harriot escribía a, aa y aaa para indicar a, a^2 y a^3, respectivamente, e introdujo los signos $>$ y $<$ para las desigualdades estrictas. Se fue a América con Sir Walter Raleigh y en 1603 Harriot estableció el siguiente método para calcular el área de un triángulo esférico:

  > *Se calcula la suma de los tres ángulos y se le restan 180 grados. Si el resultado se considera el numerador de una fracción con denominador 360 grados, dicha fracción nos indica la porción del hemisferio ocupada por el triángulo*.

- Francois Viète (1540-1603) conocido como Vieta, era abogado francés y miembro del parlamento, pero su verdadera vocación eran las matemáticas. En 1591 escribió In artem analyticem isagoge en el cual se aplicaba el álgebra a la geometría (hasta ese momento la gente había aplicado la geometría al álgebra). Fue retado por el rey Enrique IV a resolver una ecuación especial de grado 45, cuya solución pudo dar en pocos minutos tras percatarse que la cuerda de un ángulo de $360^o/45$ satisfacía la ecuación. Además, fue quien usó únicamente geometría euclídeana para construir los círculos tangentes a tres círculos dados, recuperando así una antigua construcción que probablemente aparecía en un libro perdido de Apollonius. Viète descifró un código español para los franceses, y sus soluciones de las ecuaciones cuadráticas y cúbicas son tal y como hoy en día las conocemos.

4.2.2. VIDA PROFESIONAL: Datos personales relevantes.

En la descripción de la vida profesional de Rafael Bombelli, Simon Stevin, René Descartes, Leonhard Euler y Gottfried Wilhelm von Leibniz podemos destacar lo siguiente:

- **Rafael Bombelli**

En sus obras se encuentran interesantes contribuciones a las ecuaciones bicuadradas, a la teoría de los números y al paso progresivo del álgebra geométrica a la geometría analítica, fue el último de los algebristas italianos del Renacimiento, y uno de los más importantes. Nació en Bolonia en 1526, en el seno de una familia cuyo padre Antonio Mazzoli, que cambió su apellido a Bombelli, se dedicaba al rentable comercio lanero.

Es posible, aunque improbable, que Bombelli estudiase en la Universidad de Bolonia, se sabe que el ingeniero hidráulico y arquitecto Pier Francesco Clementi se ocupó de su educación; su mentor no era tan famoso en el ámbito académico de la época, pero si en el artístico.

Posteriormente, Bombelli trabajaría durante muchos años para Alessandro Rufini, un amigo del Papa Pablo III y futuro obispo de Melfi. En ese periodo Bombelli se dedicó al saneamiento de zonas pantanosas, a raíz de la formación que había adquirido de la mano de Clementi.

A temprana edad Bombelli estudió a fondo el Ars Magna de Cardano, publicada justo cuando tenía 19 años, la edad perfecta para un espíritu inquieto. A raíz de la polémica que se había generado entre Cardano, Tartaglia y del Ferro; Bombelli decidió emprender la escritura de un tratado de álgebra, con más claridad a lo expuesto por Cardano. Entonces Bombelli planificó su L'Algebra en 5 libros, de los que terminó 3 entre 1557 y 1560 que condensó de manera lógica y sistemática toda el álgebra conocida hasta la fecha, brindando gran número de ejemplos y aplicaciones a problemas prácticos. Se aprecia una fuerte influencia de la Arithmetica de Diofanto, que Bombelli había estudiado exhaustivamente en Roma y que incluso había intentado traducir.

En consecuencia, el libro II de L'Algebra trató la resolución de ecuaciones de grado menor o igual a cuatro, considerando sólo términos positivos, lo que lo llevó a un dilema tal como el que había experimentado Cardano. En el libro III aparece la resolución de problemas prácticos empleando los métodos teóricos que había descrito en el tomo anterior, pero con un tinte considerablemente teórico poco habitual, o casi inexistente para la época. Los dos libros restantes no se publicaron a raíz de la muerte de Bombelli en 1573, quedaron como obras inéditas hasta 1923 año en el que se descubrió el manuscrito de la obra completa en una biblioteca de Bolonia. Los tomos IV y V de L´Algebra contenían aplicaciones geométricas al álgebra, y del álgebra a la geometría, respectivamente, influenciadas por procedimientos geométricos de Omar Khayyam. Este descubrimiento tardío significó una gran pena en virtud de que contenía ideas importantes de Bombelli que se adelantaban a las necesidades del siglo XVII.

Uno de los aspectos que más se destacan del L'Algebra de Bombelli es la aparición por primera vez de los números complejos, tal como se describe en el artículo "El pensamiento salvaje de Bombelli". Esto resultó trascendental debido a que hubo que esperar dos siglos y medio más para que Galois demostrara que si las ecuaciones cúbicas son irreducibles, como lo analizaba Bombelli, entonces no es soluble por radicales sin pasar por el campo complejo.

El impacto de la obra de Bombelli se hizo notar en muchos matemáticos que le sucedieron, entre los que se puede mencionar a Leibniz que estudió minuciosamente el trabajo de Bombelli y lo llenó de elogios.

- **Simón Stevin:**

Simón Stevin nació en Brujas en 1548, se cree que en su juventud trabajó como contable e intendente de un mercader de Amberes, para después viajar por Polonia, Dinamarca y otras zonas del norte de Europa, que entró al servicio del príncipe Mauricio de Nassau, con el que trabajó en calidad de consejero, cargo que, en los Países Bajos, se encargaba de la supervisión de las obras públicas, sobre todo las relacionadas con los diques marítimos. Se sabe que murió en 1620, dejando a su esposa a cargo de sus dos hijos.

En su época, su reputación se debió principalmente al hecho de haber inventado un “yate” terrestre, impulsado por velas, que era capaz de transportar a más de 25 personas a velocidades cercanas a los 80 km/h. Alrededor del año 1600, el príncipe de Nassau acabó prohibiendo su aplicación práctica defendiendo que tal medio de transporte arruinaría a los arrieros y al sistema de postas basado en los caballos.

Este científico publicó “La aritmética de Simon Stevin, de Brujas” que consistía en un breve informe sobre las fracciones decimales en el que exponía el uso de las mismas para la extracción de la raíz cuadrada de un número. También introdujo una nueva notación para describir los números decimales, aunque esta no obtuvo gran éxito. Otra gran aportación de Stevin fue la de la noción de número, pues, hasta entonces, los matemáticos desconocían que el número implicaba la unidad. Además, fue el primer matemático que reconoció la validez del número negativo al aceptarlo como resultado de los problemas que resolvía.

Este gran matemático desarrolló el algoritmo de trabajo para la obtención del máximo común divisor de dos polinomios.

En el campo de la física fue el que describió la paradoja hidrostática, que consistía en que la presión descendente de un fluido sobre un cuerpo es independiente de la forma de éste y sólo depende de la altura y de la base del plano. También fue uno de los primeros científicos en distinguir entre el equilibrio estable e inestable en problemas de flotación, y demostró el equilibrio de un cuerpo en un plano inclinado.

Además de todo lo comentado, Simon Stevin aportó varios conocimientos sobre distintos campos, como la música, la economía o la semiología.

- **René Descartes:**

Nació el 31 de marzo de 1596, en La Haye, cerca de Tours, Francia, en una Europa entregada a la guerra, en las aflicciones de la reconstrucción religiosa y política.

Después del esplendor de la antigua filosofía griega y del apogeo y crisis de la escolástica en la Europa medieval, los nuevos aires del Renacimiento y la revolución

científica que lo acompañó darían lugar, en el siglo XVII al nacimiento de la filosofía moderna.

El primero de los *ismos* filosóficos de la modernidad fue el racionalismo; Descartes, su iniciador, se propuso hacer tabla rasa de la tradición y construir un nuevo edificio sobre la base de la razón y con la eficaz metodología de las matemáticas. Su "duda metódica" no cuestionó a Dios, sino todo lo contrario; sin embargo, al igual que Galileo, hubo de sufrir la persecución a causa de sus ideas.

Para mencionar tan sólo algunos de los hombres sobresalientes cuyas vidas coincidieron en parte con la de Descartes, recordaremos que Fermat y Pascal fueron sus contemporáneos en Matemática; Shakespeare murió cuando Descartes tenía 20 años; Descartes nació cuando Galileo tenía ocho años, y Newton tenía ocho años cuando Descartes murió; Descartes tenía 12 años cuando Milton nació, y Harvey, el descubridor de la circulación de la sangre, nació cuando Descartes tenía 7 años, mientras Gilbert, el fundador de la ciencia del electromagnetismo, murió cuando Descartes tenía 7 años.

René Descartes procedía de una antigua y noble familia, aunque el padre de René no era poderoso, sus medios de fortuna le permitían vivir fácilmente y su hijo fue destinado a la carrera de gentilhombre, noblesse oblige, al servicio de Francia. René fue el tercero y último hijo de la primera mujer del padre, Jeanne Brochard, quien murió pocos días después del nacimiento de René. El padre parece haber sido un hombre de raro sentido que hizo todo lo posible para educar a sus hijos sin que sintieran la pérdida de su madre. Una excelente mujer tomó el lugar de la madre, y el padre, que luego volvió a casarse, mantuvo una constante e inteligente vigilancia sobre su "joven filósofo" que siempre quería conocer la causa de todas las cosas que hay bajo el sol, y por cuya razón siempre narraba cosas acerca del cielo. Descartes no fue realmente un niño precoz, pero su frágil salud le forzó a gastar la vitalidad que tenía en empresas intelectuales.

Debido a la delicada salud de René su padre demoró su enseñanza, sin embargo, era guiado por su propia iniciativa y su padre le dejó hacer lo que le placía. Cuando Descartes tenía ocho años, el padre resolvió que no podía retrasar más su educación formal. Después de una inteligente busca eligió el colegio de jesuitas en La Fléche como la escuela ideal para su hijo y abandonó la escuela, en agosto de 1612, teniendo 17 años.

Descartes tuvo una hija con una de sus mujeres, pero murió a temprana edad, la muerte precoz de la niña le afectó profundamente. Posiblemente su razón para no casarse pudo haber sido, como respondió a una dama, que prefería la verdad a la belleza; pero parece más probable que no estaba dispuesto a sacrificar su tranquilidad y reposo. Los recursos económicos de Descartes no eran muy brillantes, pero le eran suficientes, por esto ha sido llamado frío y egoísta. Parece más exacto decir que sabía a dónde se dirigía y que se daba cuenta de la importancia de su meta. Sobrio y abstemio en sus costumbres, no imponía en su casa el régimen espartano que algunas veces prescribía para sí mismo. Sus sirvientes le adoraban y él se interesaba por su bienestar largo tiempo después que habían prestado sus servicios.

Años después, Descartes criticaría amargamente la educación recibida. Es perfectamente posible, sin embargo, que su descontento al respecto proceda no tanto de consideraciones filosóficas como de la natural reacción de un adolescente que durante tantos años estuvo sometido a una disciplina, y de la sensación de inutilidad de todo lo aprendido en relación con sus posibles ocupaciones futuras (burocracia o milicia). Tras su etapa en La Flèche, Descartes obtuvo el título de bachiller y de licenciado en derecho por la facultad de Poitiers (1616), y a los veintidós años partió hacia los Países Bajos, donde sirvió como soldado en el ejército de Mauricio de Nassau. En 1619 se enroló en las filas del Maximiliano I de Baviera.

Según relataría el propio Descartes en el Discurso del Método, durante el crudo invierno de ese año se halló bloqueado en una localidad del Alto Danubio, posiblemente cerca de Ulm; allí permaneció encerrado y lejos de cualquier relación social, sin más compañía que la de sus pensamientos. En tal lugar, y tras una fuerte crisis de escepticismo, se le revelaron las bases sobre las cuales edificaría su sistema filosófico: el método matemático y el principio del cogito, ergo sum. Durante la noche del 10 de noviembre de 1619 tuvo tres sueños, en cuyo transcurso según él, intuyó su método y conoció su profunda vocación de consagrar su vida a la ciencia.

En 1637 apareció su famoso Discurso del método, presentado como prólogo a tres ensayos científicos. Por la audacia y novedad de los conceptos, la genialidad de los descubrimientos y el ímpetu de las ideas, el libro bastó para dar a su autor una inmediata y merecida fama, pero también por ello mismo provocó un diluvio de polémicas, que en adelante harían fatigosa y aun peligrosa su vida.

Descartes proponía en el Discurso una duda metódica, que sometiese a juicio todos los conocimientos de la época, aunque, a diferencia de los escépticos, la suya era una duda orientada a la búsqueda de principios últimos sobre los cuales cimentar sólidamente el saber. Este principio lo halló en la existencia de la propia conciencia que duda, en su famosa formulación “pienso, luego existo”. Sobre la base de esta primera evidencia pudo desandar en parte el camino de su escepticismo, hallando en Dios el garante último de la verdad de las evidencias de la razón, que se manifiestan como ideas "claras y distintas".

El método cartesiano, que Descartes propuso para todas las ciencias y disciplinas, consiste en descomponer los problemas complejos en partes progresivamente más sencillas hasta hallar sus elementos básicos, las ideas simples, que se presentan a la razón de un modo evidente, y proceder a partir de ellas, por síntesis, a reconstruir todo el complejo, exigiendo a cada nueva relación establecida entre ideas simples la misma evidencia de éstas. Los ensayos científicos que seguían al Discurso ofrecían un compendio de sus teorías físicas, entre las que destaca su formulación de la ley de inercia y una especificación de su método para las matemáticas.

En 1649 Descartes aceptó la invitación de la reina Cristina de Suecia, que le exhortaba a trasladarse a Estocolmo como preceptor suyo de filosofía. Descartes no fue feliz ahí, ya que estaba acostumbrado a las comodidades y no le era fácil levantarse cada día a las cuatro de la mañana, en plena oscuridad y con el frío invernal royéndole los huesos, para adoctrinar a una reina que no disponía de más tiempo libre debido a sus obligaciones. Los madrugones y el frío pudieron más que el filósofo, que murió de una pulmonía a principios de 1650, cinco meses después de su llegada.

- **Gottfried Wilhelm von Leibniz**

(Leipzig, actual Alemania, 1646 - Hannover, 1716) Filósofo y matemático alemán. Su padre, profesor de filosofía moral en la Universidad de Leipzig, falleció cuando Leibniz contaba con seis años. Capaz de escribir poemas en latín a los ocho años, a los doce empezó a interesarse por la lógica aristotélica a través del estudio de la filosofía escolástica.

En 1661 ingresó en la universidad de su ciudad natal para estudiar leyes, y dos años después se trasladó a la Universidad de Jena, donde estudió matemáticas con E. Weigel. En 1666, la Universidad de Leipzig rechazó, a causa de su juventud, concederle el título de doctor, que Leibniz obtuvo, sin embargo en Altdorf; tras rechazar el ofrecimiento que allí le se hizo de una cátedra, en 1667 entró al servicio del arzobispo elector de Maguncia como diplomático, y en los años siguientes desplegó una intensa actividad en los círculos cortesanos y eclesiásticos.

En 1672 fue enviado a París con la misión de disuadir a Luis XIV de su propósito de invadir Alemania; aunque fracasó en la embajada, Leibniz permaneció cinco años en París, donde desarrolló una fecunda labor intelectual. De esta época datan su invención de una máquina de calcular capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas, así como la elaboración de las bases del cálculo infinitesimal.

Por otra parte, Leibniz defendió una física de la energía, ya que ésta es la que hace posible el movimiento. Los elementos últimos que componen la realidad son las mónadas, puntos inextensos de naturaleza espiritual, con capacidad de percepción y actividad, que, aun siendo simples, poseen múltiples atributos; cada una de ellas recibe su principio activo y cognoscitivo de Dios, quien en el acto de la creación estableció una armonía entre todas las mónadas. Esta armonía preestablecida se manifiesta en la relación causal entre fenómenos, así como en la concordancia entre el pensamiento racional y las leyes que rigen la naturaleza.

Las contribuciones de Leibniz en el campo del cálculo infinitesimal, efectuadas con independencia de los trabajos de Newton, así como en el ámbito del análisis combinatorio, fueron de enorme valor. Introdujo la notación actualmente utilizada en el cálculo diferencial e integral. Los trabajos que inició en su juventud, la búsqueda de un lenguaje perfecto que reformara toda la ciencia y permitiese convertir la lógica en un cálculo, acabaron por desempeñar un papel decisivo en la fundación de la moderna lógica simbólica.

En sus últimos años Leibniz se dedicó a su tarea de historiador y a la redacción de sus obras filosóficas más importantes, que se publicaron póstumamente.

- **Leonhard Euler:**

Euler nació en Basilea, Suiza y en esa ciudad comenzó sus estudios universitarios, a los 13 años. En 1723, recibió el título de Maestro de Filosofía. En 1726, a los 19 años de edad, finalizó su doctorado y en julio de ese año, aceptó el cargo de profesor de filosofía en la Academia Imperial Rusa de las Ciencias, en San Petersburgo en donde vivió 15 años.

En el año 1741, aceptó un cargo que le ofreció Federico II el Grande, rey de Prusia, en la Academia de Berlín. Vivió veinticinco años en Berlín. Euler está considerado como el principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes de todos los tiempos. Trabajó prácticamente en todas las áreas de las matemáticas: geometría, cálculo, trigonometría, álgebra, teoría de números, además de física continua, teoría lunar y otras áreas de la física.
Ha sido uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. Si se imprimen todos sus trabajos, muchos de los cuales son de una importancia fundamental, ocuparían entre 60 y 80 volúmenes. En 1748, publicó “Introducción al análisis infinitesimal”, un texto sobre las funciones matemáticas. Y en 1755, publicó "Instituciones del Cálculo Diferencial”.

Dotado de una memoria prodigiosa, era capaz de recitar toda la Eneida y se sabía de memoria hasta la sexta potencia de los primeros 100 números primos. El cálculo se convirtió en uno de los principales objetos del trabajo de Euler. Sus ideas supusieron grandes avances en ese campo:

- Introdujo y popularizó varias convenciones referentes a la notación en los escritos matemáticos en sus numerosos y muy utilizados libros de texto.

- Introdujo del concepto de función matemática, siendo el primero en escribir $f(x)$ para hacer referencia a la función f aplicada sobre el argumento x. Esta nueva forma de notación ofrecía más comodidad frente a los rudimentarios métodos del cálculo infinitesimal existentes hasta la fecha, iniciados por Newton y Leibniz.

- Introdujo la notación moderna de las funciones trigonométricas.

- A él se debe el uso la letra e como base del logaritmo natural o neperiano, de la letra griega Σ como símbolo de los sumatorios, de la letra i para hacer referencia a la unidad imaginaria y popularizó el uso de la letra griega π para hacer referencia al cociente entre la longitud de la circunferencia y la longitud de su diámetro.

- Descubrió de la expansión de series de potencias de la función arcotangente.

- Introdujo el uso de la función exponencial y de los logaritmos en las demostraciones analíticas.

- Descubrió formas para expresar varias funciones logarítmicas utilizando series de potencias.

- Definió con éxito logaritmos para números negativos y complejos, expandiendo enormemente el ámbito de la aplicación matemática de los logaritmos.

- Definió la función exponencial para números complejos, y descubrió su relación con las funciones trigonométricas, mediante la llamada “Fórmula de Euler” que fue calificada por Richard Feynman como la fórmula más reseñable en matemáticas, porque relaciona las principales operaciones algebraicas con las importantes constantes $0, 1, e, i$ y π. En 1988, los lectores de la revista especializada Mathematical Intelligencer la eligieron mediante una votación como “la fórmula matemática más bella de la historia”.

Aparte de aplicar con éxito sus herramientas analíticas a los problemas de mecánica clásica, también las aplicó sobre los problemas de los movimientos de los astros celestes.

Su trabajo en astronomía fue reconocido mediante varios Premios de la Academia de Francia a lo largo de su carrera, y sus aportaciones en ese campo incluyen cuestiones como la determinación con gran exactitud de las órbitas de los cometas y de otros cuerpos celestes, incrementando el entendimiento de la naturaleza de los primeros, o el cálculo de paralaje solar.

Estuvo ciego durante los últimos años de su vida, pero siguió trabajando y dictando los textos a su hijo mayor. El 18 de septiembre de 1783, falleció en la ciudad de San Petersburgo tras sufrir un ictus. Sus restos descansan en el Monasterio Alexander Nevsky, considerado uno de los conjuntos arquitectónicos más grandes de San Petersburgo.

4.2.3 RELACIÓN ENTRE COLEGAS

En este apartado relataremos la relación entre colegas en la etapa analítica de los números complejos. A partir de la publicación de la obra L´Algebra de Bombelli, fueron muchas las declaraciones de distintos Matemáticos y Físicos entre ellas, mencionaremos los postulados de algunos de ellos respecto a la idea de operar con números donde se involucraban raíces negativas: Simón Stevin apuntó en 1585 lo siguiente en esta dirección:

> *Tiene toda la legitimidad el que uno se ejercite en otras tareas y no pierda el tiempo en inexactitudes.* (Kleiner, 1998 p. 713)

En el libro de Stewart (2014) nos menciona que Descartes interpretaba a los números imaginarios como una señal de que un problema no tenía solución pues asociaba a estos números con la imposibilidad de una construcción geométrica.

Leibniz no tenía duda sobre la importancia de los números imaginarios. Según Stewart (2014), en 1702 escribió:

> *"El Espíritu Santo encontró una salida sublime en esta maravilla del análisis, ese presagio del mundo ideal, ese anfibio entre el ser y no ser, el cual llamamos la raíz imaginaria de la unidad negativa".* (P. 111)

Euler expresaba lo siguiente:

> *"Como todos los números imaginables son mayores, menores o iguales a cero, entonces es claro que la raíz cuadrada de un número negativo no puede ser uno de estos números, [...] y esta circunstancia nos lleva al concepto de tales números, que por su naturaleza son imposibles y ordinariamente son llamados imaginarios o números falsos, porque solo existen en la imaginación".* (Kleiner, 1998 p. 714)

4.2.4 PRODUCCIÓN E INTENCIONALIDAD

Todas estas declaraciones se debían a la producción e intencionalidad de las matemáticas que trabajaban en ese momento por ello mencionaremos qué se encontraban trabajando cuando realizaron esas declaraciones.

- Simón Stevin:

Simon Stevin fue uno de los primeros matemáticos en desprenderse de la concepción griega del número, define número como “aquello, por lo cual se explica la cantidad de cada una de las cosas”. Para Stevin, el número no es una cantidad discontinua. De igual forma, Stevin acepta que puede operar con los números como se manipulan las cantidades en general, aclarando que los números se independizan de sus orígenes y se puede operar con ellos sin referirse a las cantidades de donde surgieron. Finalmente, a diferencia de la concepción griega, Stevin reconoce el “uno” como número. De hecho, en mayúscula publica «LA UNIDAD ES UN NÚMERO».

Stevin introdujo algunas simplificaciones en la notación algebraica. Así, usó el signo + para la adición y el símbolo – para la sustracción, la letra M para la multiplicación y la letra D para la división; sin embargo, no dispuso de un símbolo especial para la igualdad. Para la raíz cuadrada y la raíz cúbica también utilizó caracteres especiales, parecidos a los actuales.

En su libro *Appendice Algebraique* (1594), Stevin (mediante las siguientes ecuaciones cúbicas $x^3 = 300x + 33915024$ y $x^3 = 300x + 33900000$) presentó un método general para el cálculo aproximado de las soluciones reales de una ecuación de cualquier grado.

Esto es, la idea del método de aproximación de las raíces mediante sustituciones sucesivas, señalando que, si el producto entre los valores numéricos de ambos miembros de la ecuación es negativo para dos valores numéricos de la variable, la raíz está comprendida entre esos dos valores. Así en la ecuación $x^3 = 300x + 33915024$, da a x los valores $10, 100, 1000$ y comprueba que x está entre 100 y $1\,000$; al darle los valores $100, 200, 300, 400$, comprueba que está entre 300 y 400 y así sucesivamente.

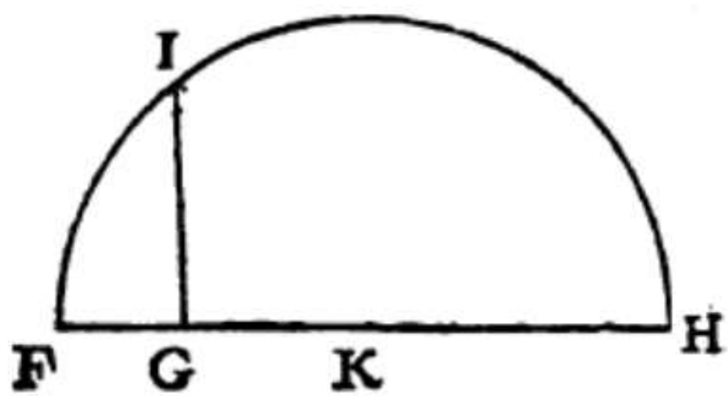
- Descartes

El más famoso de los tratados de Descartes, el Discurso del método, contiene el apéndice La geometría que relaciona por primera vez nociones del álgebra con objetos geométricos, dando lugar a la aparición de la geometría analítica o cartesiana.

Inicia con “La Geometría”, haciendo un paralelo entre las operaciones aritméticas y su equivalente geométrico. Específicamente, habla de la multiplicación, la división y la extracción de la raíz cuadrada. Para hacer esto, Descartes (1637) toma una línea que llama la unidad.

Y para extraer la raíz cuadrada, efectúa el siguiente procedimiento:

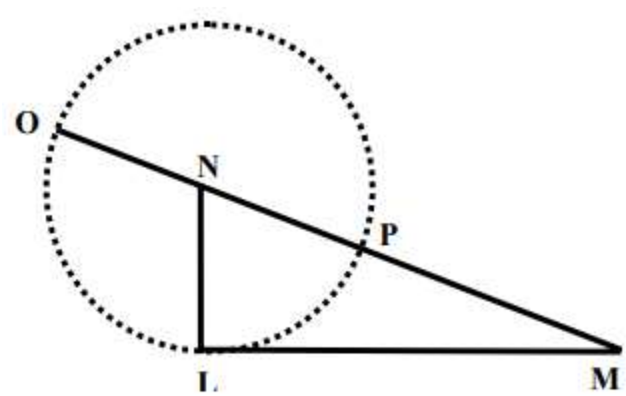
> Si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con este punto como centro se traza el círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada (p. 298).



Para extraer la raíz cuadrada de un número, Descartes compara dicho número con la longitud de una línea recta. Es evidente que no considera la raíz cuadrada de un número negativo, ya que no puede dibujar una línea cuya longitud sea negativa. Como no es posible plasmarlo, se lo tendrá que imaginar.

Cuando Descartes empieza a mostrar su solución a los problemas planos (ecuaciones cuadráticas), realiza una construcción en la que va a encontrar la raíz de la ecuación o la línea desconocida, puede ser sólo una raíz. En este punto, empieza a hacer alusión a las ecuaciones donde no puede encontrar ninguna raíz (real) y clasifica la construcción de estos problemas como imposibles.

Si tenemos una ecuación de la forma $z^2 = az + bb$, Descartes construye el triángulo rectángulo NLM, cuyo lado LM es igual a b, raíz cuadrada de la cantidad conocida bb, y el otro LN es $\frac{1}{2}a$, la mitad de la otra cantidad conocida, que está multiplicada por z, que supone ser la línea desconocida. Luego, prolongando MN, base de ese triángulo, hasta O, de modo que NO sea igual a NL, la línea total OM es z, la línea buscada; ella se expresa:



$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

Si se tuviera $yy = -ay + bb$ e y fuera la cantidad que debe encontrarse, se construye el mismo triángulo rectángulo NLM y de la base MN se quita NP, igual a NL; el resto PM es y, la raíz buscada. De modo que tengo

$$y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

Y lo mismo, si tuviera $x^4 = -ax^2 + b^2$ PM sería x^2 y tendría

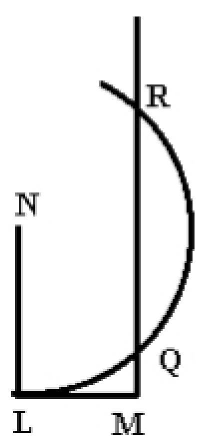
$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$$

En fin, si tuviera la ecuación de la forma $z^2 = az - bb$, la resuelve de la siguiente manera:

Se hace NL igual a $\frac{1}{2}a$, y LM igual a b; luego, en vez de unir los puntos M y N, se traza MQR paralela a LN y trazando un círculo con centro en N y que pase por L la cortará en los puntos Q y R, la línea buscada z es MQ, o bien MR, pues en este caso ella se expresa de dos maneras (p. 303).

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$



Y si el círculo que tiene su centro en N y pasa por el punto L no corta ni toca la línea recta MQR, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible.

Hasta este momento Descartes todavía no tenía en cuenta las raíces imaginarias. En la exploración de la solución a los problemas sólidos, Descartes (1637) aclara que, “en cada ecuación, según cuantas dimensiones tenga la cantidad desconocida, otras tantas serán las diversas raíces que puede haber, es decir, valores de esa cantidad” (p. 372). En este momento, ya no puede descartar las raíces imaginarias.

En su libro tercero, Descartes (1637) plantea varias reglas para modificar las ecuaciones: ¿cómo puede disminuirse el número de dimensiones de una ecuación cuando se conoce alguna de sus raíces? ¿cómo puede investigarse si una cantidad dada es el valor de una raíz? ¿cómo se hace para que las raíces falsas de una ecuación se vuelvan verdaderas y las verdaderas falsas? ¿cómo pueden aumentarse o disminuirse las raíces de una ecuación sin conocerlas? ¿cómo se puede sacar el segundo término de una ecuación? ¿cómo puede hacerse para que todas las raíces falsas de una ecuación se vuelvan verdaderas sin que las verdaderas se vuelvan falsas? ¿cómo se hace para que todos los lugares de una ecuación estén llenos? ¿cómo pueden multiplicarse o dividirse las raíces sin conocerlas? ¿cómo se reducen los números quebrados de una ecuación a números enteros? ¿cómo se hace la cantidad conocida de uno de los términos de una ecuación igual a otra cantidad dada?

Posteriormente, define las raíces imaginarias, diciendo:

> “Tanto las raíces verdaderas como las falsas no son siempre reales sino a veces solamente imaginarias; es decir que puede siempre imaginarse todo lo que he dicho en cada ecuación, pero que no hay a veces ninguna cantidad que corresponda a las que se imagina” (p. 380).

En esta parte Descartes da el nombre de imaginarios a las raíces cuadradas de números negativos.

- Leibniz

El cálculo con números complejos se complicó cuando, a finales del siglo XVI, aparecieron los logaritmos, que se transformaron en una herramienta fundamental de cálculo, sobre todo para el uso de las tablas trigonométricas, ya que abreviaban los cálculos en astronomía y proporcionaban un método sencillo para multiplicar senos de ángulos mediante un proceso de adición directa.

Específicamente Leibniz y Bernoulli se enfrentaron en un acalorado debate al tratar sobre la existencia de logaritmos de números negativos y complejos, esto debido a que se encontraban con ellos al resolver integrales donde usaban a los números complejos para poder ser resueltas, por ejemplo:

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{(x - ai)(x + ai)} dx$$
$$= \frac{-1}{2ai} \int \frac{1}{(x + ai)} - \frac{1}{(x - ai)} dx = \frac{-1}{2ai} (\log(x + ai) - \log(x - ai))$$

Cantoral y Farfán (2008) ponen en evidencia que las controversias con respecto al valor del logaritmo de un número negativo, desató, por ejemplo, entre Leibniz y Bernoulli, un incesante debate donde se refutaban ideas y se vislumbraba una extensión de las propiedades de los logaritmos para números negativos. Por ejemplo, Leibniz, en un debate epistolar con Bernoulli, exponía lo siguiente con respecto al logaritmo de un número negativo: "$log(-2)$ no existe, porque si existiera, su mitad sería igual a $log(\sqrt{-2})$, una imposibilidad" (p.248), y análogamente como mencionamos anteriormente, Leibniz le escribe a Bernoulli en 1713 lo siguiente:

> "Suponiendo $2^e = x$, si $x = 1$ entonces $e = 0$, si $x = 2$, entonces $e = 1$. Cuando $x = -1$, e no puede determinarse" (p.249).

Es importante señalar que ambos argumentos expuestos por Leibniz a Bernoulli pretendían que la extensión de los logaritmos a números negativos no precisara de los números complejos, imposibilitando así, exploraciones con respecto al campo de dichos números. Por otro lado, debates entre Euler y Bernoulli fructificaron e incluso permitieron repensar la idea de lo que significa el concepto de función, e incluso plantean rupturas de corte epistemológico en las matemáticas de la época, puesto que debate con la conservación de propiedades establecidas en las matemáticas aceptadas socialmente (Cantoral y Farfán, 2008).

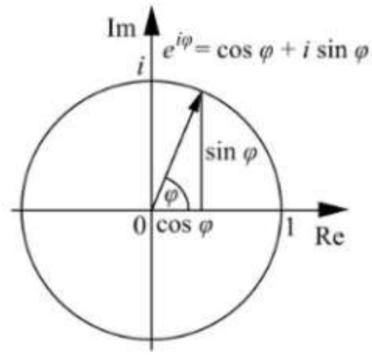
- Euler

La controversia anterior fue resulta por Euler al proponer la identidad $e^{i\pi} = -1$, la cual es una de las ecuaciones más bellas y enigmáticas que surgieron casi por accidente.

Euler fue el primero en usar la notación $i = \sqrt{-1}$ Él da un uso fundamental de los números complejos relacionando la exponencial y las funciones trigonométricas con la expresión $e^{iz} = cosz + isenz$. Recordemos que en las series trigonométricas, el número z (cuando es real) tiene que medirse en radianes, para lo cual los $360°$ de un circulo completo pasan a ser 2π radianes. En particular el ángulo $180°$ es π radianes. Además $\sin \pi = 0$ y $\cos \pi = -1$. Por lo tanto : $e^{i\pi} = cos\pi + isen\pi = -1$. Con ello el número imaginario i une los dos números más notables en matemáticas, e y π en una única y elegante ecuación, la cual comúnmente aparece en la cima de las listas en encuestas para la ecuación más bella en matemáticas.

Esta fórmula de Euler se puede ilustrar en el plano de la siguiente manera

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(cosy + iseny).$$



DISCUSIÓN

Con la publicación del libro L´Algebra de Bombelli se generarón una serie de afirmaciones de distintos matemáticos entre ellos Stevin, Descartes, Euler y Leibniz; cada uno de ellos fijando una postura respecto a estos nuevos números que tanto intrigaban en ese momento.

Por ejemplo, Stevin plateaba idea del método de aproximación de las raíces mediante sustituciones sucesivas además de introducir algunas notaciones para operaciones básicas como la suma o la resta. Aporta ideas para trabajar con números negativos además de aportes en el plano geométrico.

Descartes vinculó íntimamente el Álgebra con la Geometría, hasta el punto de extraer conclusiones geométricas de un hecho estrictamente algebraico para él si la ecuación no tiene solución el problema geométrico no se puede construir, porque encontrar la solución es construir la línea. Los principios del método cartesiano aplicados a la Geometría inician los problemas geométricos por un proceso intermedio de escritura algebraica que revierte finalmente sobre la geometría del problema conduciendo a la construcción de la línea solución.

Para ambos matemáticos, Descartes y Stevin estos números no tenían ningún significado pues si ya eran intrigantes aún no se conocía una representación geométrica y por ende eso sólo significaba una pérdida de tiempo.

Por otra parte, Leibniz y Euler coincidían en algunos aspectos con Descartes y Stevin, ellos tampoco sabían lo se significaban los números complejos, pero eso no les importaba, operaban con ellos respetando las leyes del algebra sin preguntarse qué eran. Ellos sabían que números imaginarios no surgieron como respuesta a un problema concreto, externo a la matemática, sino como un artificio de cálculo que permitía establecer un puente entre una ecuación con coeficientes reales y unas soluciones también reales.

Por lo tanto, se concluye que el concepto de número complejo no es necesario para nada como queda bien reflejado por su nombre inicial “número imaginario” y en consecuencia sin existencia real, los matemáticos de esa época usaban los números imaginarios sin tener una definición rigurosa de lo que significaban.

Esta fue la etapa donde comienzan estos números a ganar terreno en el subconsciente de los matemáticos y reconocen que debían empezar a explorar sus propiedades y comportamientos.

ESCENARIO DE SIGNIFICACIÓN

ETAPA ANALÍTICA Generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal.		
Daniel Bernoulli, Leonhard Paul Euler, René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz y Simón Stevin .		
ÉPOCA	Vida profesional	Intencionalidad y uso
Problemas abordados de los números imaginarios por científicos de la época. Algunos sucesos relevantes en el periodo del Renacimieno alrededor de los años 1572 (fecha de la publicación dl el libro *L'Algebra de Bombelli*) y 1673 (año de la publicación del libro *A treatise of algebra, both*	Datos personales relevantes. Relación con sus colegas. En 1572 Bombelli publicó *L´Algebra*, su objetivo principal era poder clarificar el libro de Cardano. Lo que hizo Bombelli según Bagazgoitia (2007) para solucionar la ecuación $x^3 - 15x - 4 = 0$ en la cual obteníamos como resultado $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, fue operar	Intencionalidad y uso específico de los investigadores en la producción de raíces imaginarias para poder entender el porqué de sus declaraciones las cuales con las siguientes: • Euler: “Como todos los números imaginables son mayores, menores o iguales a cero, entonces es claro que la raíz cuadrada de un número negativo no puede ser uno de estos números, [...] y esta circunstancia nos lleva al concepto de tales números, que por su naturaleza son imposibles y ordinariamente son llamados imaginarios o números falsos, porque solo existen en la imaginación”. Esta declaración se fundamenta en que Euler trabajaba herramientas analíticas a los problemas de

historical and practical, libro escrito por Wallis donde se da una de las primeras interpretaciones geométricas de los números complejos) el inglés Thomas Harriot escribía a, aa y aaa para indicar a, a^2 y a^3, respectivamente, e introdujo los signos $>$ y $<$ para las desigualdades estrictas.	con estos números ignorando lo que signifique las raíces negativas y operando como si fueran números ordinarios y respetando las reglas del álgebra. los cálculos con toda formalidad, pero carentes de sentido realizados por Bombelli conseguían una respuesta correcta, lo cual era un número real perfectamente normal, por todo ello podemos nombrar a Bombelli como el padre de los números complejos ya que fue el primero en desarrollar el álgebra para operar con estos números. A pesar de lo aportado por Bombelli, su trabajo sobre esta materia (*L'Algebra*) fue ampliamente ignorado y considerado como misterioso e incierto. El nombre de números imaginarios lo dio, René Descartes, que se oponía a las teorías de Bombelli. Otro investigador que también se oponía era Simón Stevin. Por otro lado Euler fue quien denominó i a la unidad imaginaria, doscientos años después, en 1777. Leibniz decía de los números imaginarios que eran "una especie de anfibios entre el ser y la nada".	mecánica clásica, también realizó aportes a la astronomía. Anque Euler no lograba significar estos números, opero con ellos sin importarle qué eran, ese fue el éxito de poder hacer aportes con ellos. • Descartes interpretaba a los números imaginarios como una señal de que un problema no tenía solución. Esto debido a que él se encontraba escribiendo sus ideas geométricas aplicadas al álgebra. La posibilidad de asociar longitudes a los segmentos y hallar la longitud de un segmento que satisficiera una ecuación de segundo grado. Y lo que planteaban con raíces geométricas carecía de alguna representación geométrica hasta ese momento • Simón Stevin, 1585: "*Tiene toda la legitimidad el que uno se ejercite en otras tareas y no pierda el tiempo en inexactitudes".* La declaración obedece a que estudiaba los números negativos como resultado de ecuaciones algebraicas. Y las raíces negativas no figuraban en sus resultados. • Leibniz no tenía duda sobre la importancia de los números imaginarios. En 1702 escribió: "El Espíritu Santo encontró una salida sublime en esta maravilla del análisis, ese presagio del mundo ideal, ese anfibio entre el ser y no ser, el cual llamamos la raíz imaginaria de la unidad negativa". Sin duda alguna al igual que Euler, no se preguntó qué eran esos números ni su representación, pero operaba con ellos sin importarle que significaba en algún otro contexto.

4.3 TERCER ESCENARIO: ETAPA GEOMÉTRICA

Pese al éxito de Bombelli al darle un sentido formal a $\sqrt{-1}$ cuando aparecía en las soluciones dadas por la fórmula de Cardano, seguía sin haber una interpretación geométrica. Los matemáticos del siglo XVI estaban todavía muy relacionados a la tradición griega de la geometría, y no se sentían cómodos con conceptos a los cuales no podían darles un significado geométrico.

Por ello, los números complejos no dejaron de ser para los matemáticos esos misteriosos "números imposibles" hasta que se propuso una representación geométrica para ellos. Aunque fue John Wallis (1616-1703) quien se aproximó a la representación, posteriormente fue el danés Caspar Wessel (1745-1818) el primero que lo consiguió e identificó al número complejo con un punto en el plano, de modo que la parte real y la parte imaginaria del número complejo, respectivamente, se identifican con las coordenadas cartesianas del punto.

Además, se considera a Wessel el primero que sumó dos vectores, él era cartógrafo, pero no un matemático profesional, cuyo trabajo sobre números complejos solamente fue publicado en danés por la Academia de Ciencias Danesa en 1797, no consiguió despertar el interés a la comunidad matemática internacional. Puesto que la importancia de esta obra incluía aplicaciones a la trigonometría, a la geometría plana y esférica e incluso se anunciaban los números hipercomplejos. Hubo que esperar hasta el año 1895 para que su figura fuera redescubierta y su prioridad en el descubrimiento reivindicada.

En seguida, nos centraremos a analizar la primera interpretación geométrica dada por Wallis.

4.3.1. ÉPOCA: Problemas abordados de los números imaginarios respecto a la interpretación geométrica.

En 1796 Caspar Wessel escribió su primer y único documento matemático en el cual expresaba la interpretación geométrica de los números complejos y lo presentó en una reunión de la Real Academia Danesa el 10 de marzo de 1797 "Ensayo sobre la dirección analítica de la dirección", primer texto sobre la representación geométrica de los números complejos, aparecido en 1799 en las memorias de la Academia Real de Dinamarca, y desconocido para el mundo hasta su traducción en 1897.

> “Sea $+1$ la unidad rectilínea positiva y $+\varepsilon$ otra unidad perpendicular a la unidad positiva tomada antes, teniendo ambas el mismo origen; entonces el ángulo de la dirección de $+1$ resulta igual a 0^{o}, y por lo tanto para -1 es $180º$, para $+\varepsilon$ es 90º, y para $-\varepsilon$ es −90º o 270º. Por la regla que establece que el ángulo de la dirección del producto es igual a la suma de los ángulos de los factores, tenemos:
> $(+1)(+1) = +1; (+1)(-1) = -1;$ $(-1)(-1) = +1;$ $(+1)(+\varepsilon) = +\varepsilon; (+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon;$ $(-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon;$ $(+\varepsilon)(+\varepsilon) = -1;$ $(+\varepsilon)(-\varepsilon) = +1;$ $(-\varrho)(-\varrho) = -1.$
> De este resultado se observa que ε es igual al $\sqrt{(-1)}$, y que la divergencia del producto se determina de tal forma que ninguna de las reglas operativas comunes son contravenidas.”

El matemático autodidacta francés Jean Robert Argand (18 de julio de 1768 al 13 de agosto de 1822). En 1806 publicó a sus expensas su Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (Ensayo sobre una forma de representar las cantidades imaginarias mediante construcciones geométricas). En 1813 este ensayo fue publicado en la revista francesa Annales de Mathématiques para un público más especializado.

El ensayo discute un método de representación gráfica de los números complejos a través de la geometría analítica. Propone la interpretación del valor i como una rotación de 90 grados en el plano coordenado, llamado para este fin plano de Argand.
En particular, una publicación de Wessel en 1799 de una técnica gráfica similar no llamó tanto la atención como la que sí logró el ensayo de Argand.

4.3.2 VIDA PERSONAL Y PROFESIONAL

4.3.2.1 Intereses académicos

John Wallis fue un niño prodigio que a la edad de 14 años (en 1630, siete años antes de que se publicara La Geometrie la obra de René Descartes) leía y hablaba latín, y podía leer en griego, hebreo y francés. Irónicamente, sólo comenzó a estudiar aritmética como “una diversión placentera para las horas libres”. Sin embargo, Wallis hizo grandes progresos después de eso, y para 1647 o 1648 había progresado lo suficiente como para redescubrir él mismo la fórmula de Cardado. Pese a todo, su formación era la de un teólogo y sirvió como capitán real de Carlos II; en 1692 declinó una oferta de la reina María II para convertirlo en diácono.

Por lo tanto, fue bastante sorpresivo cuando en 1649 fue designado profesor de la cátedra Savilian de geometría en la Universidad de Oxford, esta designación fue una recompensa por sus valiosos servicios al Parlamento, pues descifró los mensajes en código capturados durante la lucha contra el rey Carlos I y sus seguidores realistas. Wallis no resultó un sicofante, sin embargo, pues si bien había sido favorecido por el Parlamento él no buscó tal favor; él había sido uno de los firmantes de la petición al Parlamento para que el depuesto Carlos I no fuera ejecutado, y firmó antes de que Cromwell lo designara profesor en Oxford.

En Oxford, Wallis fue uno de los miembros fundadores de un grupo con afinidades intelectuales que luego evolucionaría para formar la Royal Society de Londres, y fue uno de sus presidentes. Su libro de 1655, Arithmetica infinitorum, contiene el germen del cálculo integral; por ejemplo, ahí discute el problema de hallar el área bajo curvas de la forma $y = x^n$, y ahí está su famosa fórmula del producto para π:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\dots$$

el cual alternativamente se aproxima por exceso y por defecto al valor de π a medida que se incluyen más y más factores.

También, Wallis escribió que un número positivo significaba la distancia medida desde el punto cero hacia la derecha y que un número negativo significaba la distancia medida desde el punto cero hacia la izquierda. Como presenta Nahin (2008) relata que Wallis mencionó en sus propias palabras lo siguiente:

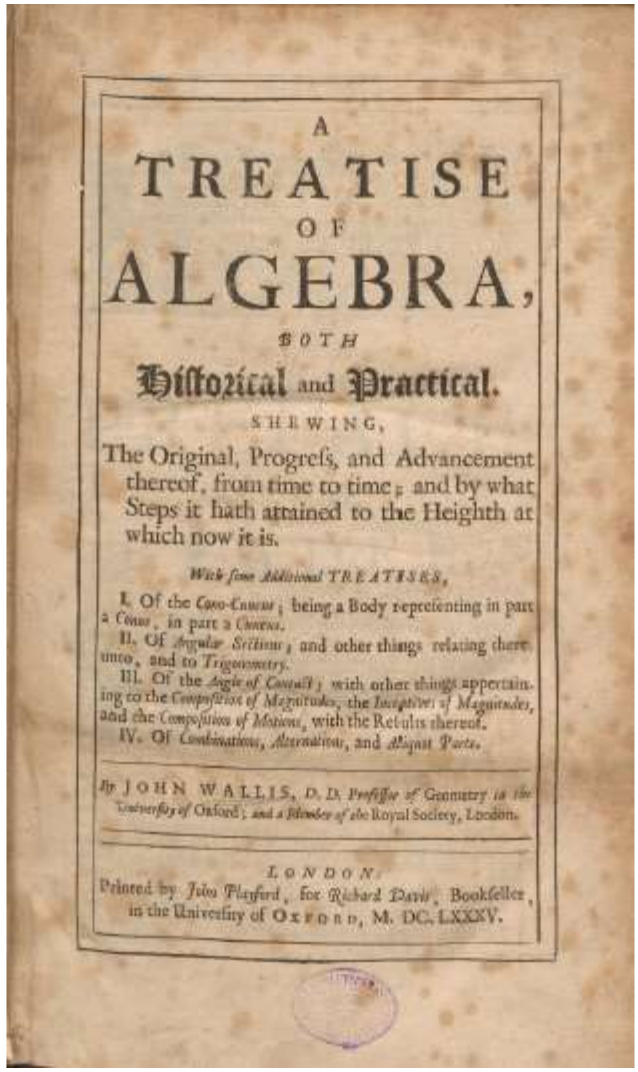
> "Y si bien, como una pura notación algebraica, un número negativo representa una cantidad menor que nada; pero, si se trata de una aplicación física, denota una cantidad tan real como si el signo fuese $+$; pero para ser interpretada en el sentido contrario." (p. 64)

4.3.2.2 Relación con sus colegas

El libro Algebra de Wallis fue de gran influencia para el joven Isaac Newton. El nexo entre Newton y Wallis se renovó muchos años después, cuando, en la controversia entre Newton y Leibniz sobre quién tenía prioridad en el desarrollo del cálculo, Wallis fue presidente de la Royal Society, participó en la mediación por los conflictivos reclamos de ambos. No es sorprendente, entonces, que cuando un hombre de semejante calibre dedicara su atención a $\sqrt{-1}$ resultara algo interesante.

Hay evidencia de que años antes de su Algebra de 1685, obra en la cual formalmente presentó su análisis de los imaginarios, Wallis ya había pensado sobre el significado geométrico de los números complejos. Por ejemplo, Wallis mantuvo correspondencia sobre este tema con el matemático inglés John Collins (1625-

1683), y un ejemplo típico de los problemas de que se ocupaba es uno que Collins relaciona, en una carta fechada el 19 de octubre de 1675, con el matemático escocés James Gregory (1638-1675). Collins escribió que, en una de las primeras cartas, para mostrar cómo puede confundirse un razonamiento, Wallis había analizado un triángulo de lados 1 y 2 con una base de 4. Wallis mostró que, si uno simplemente avanza a través de los cálculos algebraicos formales, entonces los dos segmentos de la base debajo de los lados de longitud 1 y 2 resultan reales, aunque el triángulo sea imposible de construir.


A
TREATISE
OF
ALGEBRA,
BOTH
Historical and Practical.
SHEWING,
The Original, Progress, and Advancement thereof, from time to time; and by what Steps it hath attained to the Heighth at which now it is.
With some Additional TREATISES,
I. Of the Cono-Cuneus; being a Body representing in part a Conus, in part a Cuneus.
II. Of Angular Sections; and other things relating thereunto, and to Trigonometry.
III. Of the Angle of Contact; with other things appertaining to the Composition of Magnitudes, the Inceptives of Magnitudes, and the Composition of Motions, with the Results thereof.
IV. Of Combinations, Alternations, and Aliquot Parts.
By JOHN WALLIS, D.D. Professor of Geometry in the University of Oxford; and a Member of the Royal Society, London.
LONDON:
Printed by John Playford, for Richard Davis, Bookseller, in the University of OXFORD, M. DC. LXXXV.

Aparentemente en aquel tiempo Wallis no fue más allá con su “paradoja” aunque, en una carta a Gregory, Collins escribió que “de haber continuado él habría encontrado que la perpendicular debía ser imaginaria, lo cual habría revelado la imposibilidad”. Esto sugiere que Wallis, antes de 1675, aún estaba inseguro sobre la conexión precisa entre los números imaginarios del álgebra y la geometría. Sin embargo, para 1685 Wallis había logrado un gran progreso.

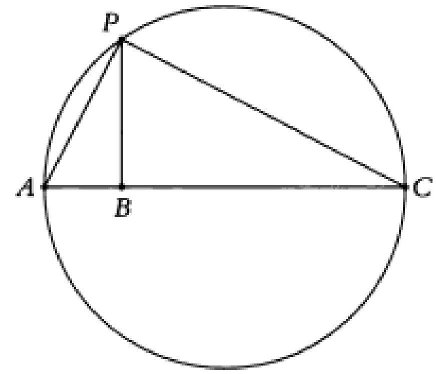
4.3.2 INTENCIONALIDAD Y USO ESPECÍFICO DE LA PRIMERA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE RAÍCES IMAGINARIAS.

Una vez asentada la interpretación correcta de los números negativos, recordó a sus lectores la llamada media proporcional; es decir, si b y c son dos números positivos dados, entonces x es la media proporcional de b y c si satisface la siguiente afirmación: “b es a x como x es a c”. O, algebraicamente

$$\frac{b}{x} = \frac{x}{c}$$

que nos dice que $x = \sqrt{bc}$.

Como se muestra en la figura de la derecha, Wallis ubicó el origen en A y luego dibujó el segmento AC. Entonces, tras encontrar el punto medio de AC, dibujó el círculo con AC como diámetro. Después tomó un punto arbitrario B en alguna parte del diámetro entre A y C, y levantó la perpendicular a B que interseca al círculo en P. Es claro que los dos triángulos ABP y PBC son rectángulos, por lo que podemos escribir



Nahin (2008), p. 64

$$BP^2 + AB^2 = AP^2$$
$$BP^2 + BC^2 = PC^2$$

Luego, $AP^2 + PC^2 = AC^2$.
Sustituyendo la primera expresión para AP^2 y PC^2en la tercera expresión, y escribiendo $AC = AB + BC$, tenemos que

$$\mathrm{BP}^2 + AB^2 + BP^2 + BC^2 = (\mathrm{AB} + \mathrm{BC})^2$$

Desarrollando el lado derecho y agrupando los términos, esta última expresión se reduce a $BP^2 = (AB)(BC)$ t es decir, a

$$BP = \sqrt{(AB)(BC)}$$

que nos dice que BP es la media proporcional de AB y BC.

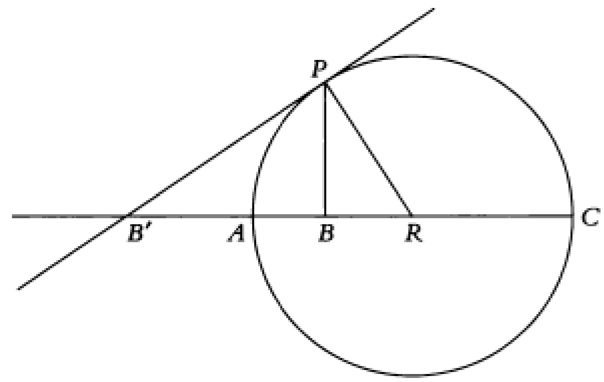
Después Wallis modificó su construcción geométrica de la media proporcional de dos segmentos (positivos, porque A B se extiende a la derecha desde A hasta B, y B C se extiende también a la derecha desde B hasta C) para incluir el caso en que uno de los segmentos representa un valor negativo. Para hacerlo dibujó otra vez hasta el paso en que localizamos B y la perpendicular en B que interseca al círculo en P, tal como se muestra en la figura anterior.

Pero entonces, utilizando P como punto de tangencia al círculo, Wallis extendió la recta tangente, esto es, construyó la perpendicular al radio PR (el punto R es el centro del diámetro AC) que pasa por P, hasta que intersecara a la extensión del diámetro AC en el punto B' a la izquierda de A.

Ahora, por construcción, el triángulo PRB' es rectángulo, y entonces por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$B'P^2 + RP^2 = B'R^2.$$

Como RP es un radio, $RP = (\ 1/\ 2\ )A\ C$. Nótese también que $B\ 'C = B\ 'A\ +\ A\ C$, por lo que entonces podemos escribir $A\ C\ =\ B´C -\ B\ 'A$
y por lo tanto $RP\ = \frac{1}{2}\ (B\ 'C\ -\ B'A)\ = (\frac{1}{2})\ A\ C$.

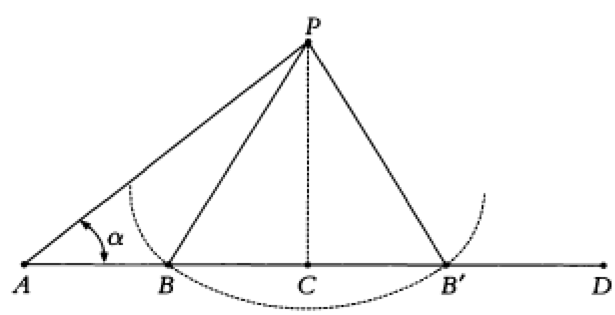


Nahin (2008), p. 66

Asimismo, $B\ 'R\ =\ B\ 'A\ +\ A\ R$ y, como AR es un radio, $B\ 'R\ =\ B\ 'A\ + (1/2)\ A\ C$,o $B\ 'R\ = B\ 'A\ +\ (\ 1\ /\ 2\ )\ (B\ 'C\ - B\ 'A\ )$, o $B´R = (\ 1/ 2\ )(B´A +\ B´C)$.
Ahora, sustituyendo esas expresiones para $R\ P$ y $B´R$ en la ecuación "pitagórica" escrita para el triángulo PRB ' ,
$B'P^2\ +\ \frac{1}{4}\ (B´C— B´A)^2 = \frac{1}{4}\ (B\ 'A\ +\ B'C)^2$
o, tras desarrollar y agrupar los términos, $B\ 'P^2\ =\ (B\ 'A\ )\ (B\ 'C)$. Si suponemos que la dirección de la extensión del segmento es irrelevante,
entonces podemos también escribir este último resultado como $B´P^2 = (A\ B\ '\ )\ (B\ 'C\ )$, lo que nos da

$$B'P\ =\ \sqrt{(AB')\ (B'C)}$$

Wallis comenzó desde cero a estudiar un problema geométrico clásico, el de construir un triángulo cuando se dan dos lados y un ángulo que no es el que forman esos dos lados. A esto se lo considera a menudo un problema ambiguo porque, hay por lo general dos posibles soluciones. Los dos lados dados son $A\ P$ y $PB\ (= PB')$ y el ángulo dado es $< PAD\ =\ \alpha$. Está claro que la altura PC del triángulo está determinada y, mientras $P\ B\ =\ P\ B\ ' > PC$, hay dos soluciones: los triángulos $APB\ y\ APB'$. Pero si $PB =\ P\ B\ ' <\ PC$, entonces no hay solución si insistimos en que la solución esté sobre la base $A\ D$ (es decir, que B y B' estén en AD).



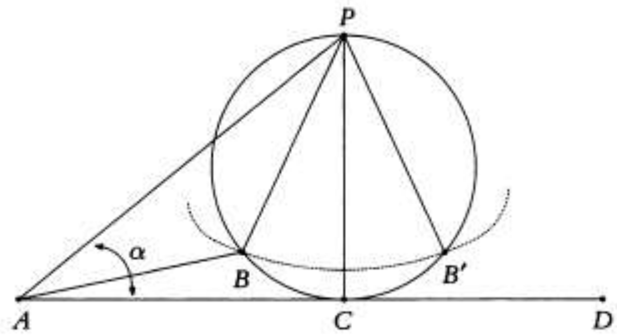
Nahin (2008), p. 67

Algebraicamente, lo que está ocurriendo puede expresarse con las siguientes ecuaciones (recordando que $B\ C\ =\ C\ B\ '$):

$$AB\ =\ AC — BC\ = \sqrt{AP^2\ -\ PC^2} - \sqrt{PB^2\ -\ PC^2}\ ,$$
$$AB' =\ AC\ +\ CB' = \sqrt{AP^2\ -\ PC^2} + \sqrt{PB^2\ -\ PC^2}\ ,$$

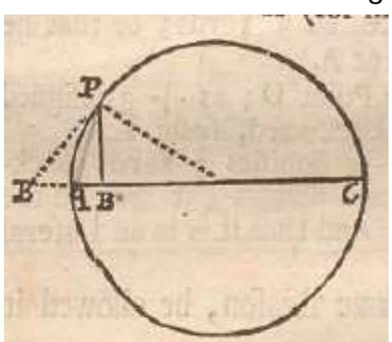
Estas dos ecuaciones dicen que, si $PC\ >\ PB$, obtenemos raíces cuadradas de números negativos.

La gran revelación de Wallis fue que, aun en el caso en que $PC > PB$, los datos dados determinan dos puntos B y B' si les permitimos que estén en otro lugar que no sea la base AD.
Construyó el círculo de diámetro PC y luego, utilizando P como centro, Wallis trazó otro arco de radio PB hasta intersecar el primer círculo en B y B'. Sostuvo entonces que los triángulos PAB y PAB' eran los triángulos solución, es decir, están determinados por los lados dados $A\,P\;y\,PB\,(=\,PB')$ y por el ángulo $< PAD = \alpha$. Ahora la diferencia es, por supuesto, que el ángulo $< PAD$ no aparece en el triángulo solución; pero podemos observar que éste no fue un requerimiento en el enunciado original del problema de construcción: sólo se pedía que el triángulo estuviera determinado por los dos lados dados y un ángulo. La gran diferencia ahora es que los puntos B y B' no yacen sobre la base AD y sino por encima de ella. Wallis se había topado con la idea de que, en algún sentido, la representación de los números imaginarios es un movimiento vertical en el plano.

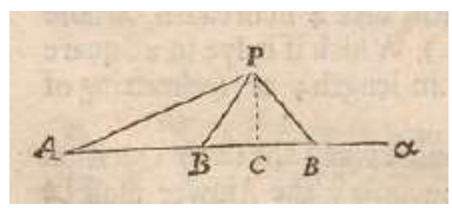


Nahin (2008), p. 68

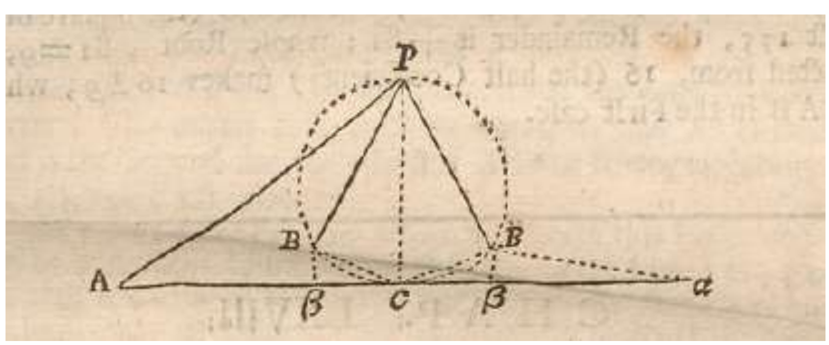
A continuación, presentamos algunas de las construcciones geométricas realizadas por Wallis en su obra A Treatise of Algebra.



P. 266



P. 266



P. 267

DISCUSIÓN

Wallis fue el primer matemático en dar una representación geométrica de los números imaginarios, al publicarla en su libro A Treatise of Algebra.

La idea de Wallis resolvía el problema de dar sentido a los números imaginarios, pero nadie le prestó la más mínima atención. No obstante, su idea ganó terreno lentamente en el subconsciente de los matemáticos.

La mayoría de ellos dejaron de preocuparse porque la raíz cuadrada de menos uno, no se podía representar en la recta real y se dieron cuenta de que podía vivir en algún lugar en el mundo más amplio, que posteriormente se le denominó el plano complejo.

Algunos no apreciaron la idea, pero otros la tomaron en serio y entendieron su importancia. La idea de que un plano complejo podía ampliar la confortable recta real y dar cabida a los imaginarios que estaba implícita en la obra de Wallis, aunque ligeramente oscurecida por la forma en que la presentaba.

Posteriormente cien años después, esto dio pauta a Wessel y Argand para poder construir la construcción geométrica que usamos actualmente para representar a los números complejos en el plano.

Esto nos hace reconocer que las matemáticas son falibles y que el conocimiento no se estanca y es absoluto, sino más bien se encuentra en un flujo constante. La representación geométrica de Wallis ha sido olvidada por algunos textos siento esta, la pionera de las representaciones posteriores, conocerla y estudiarla nos hace también reconocer que los procesos de construcción matemática pueden demorar años o incluso siglos para poder construirlas con las propiedades que funcionan de manera perfecta como las conocemos actualmente.

ESCENARIO DE SIGNIFICACIÓN

<table>
<tr><td colspan="3">ETAPA GEOMÉTRICA
Primeras construcciones geométricas realizadas con raíces de cantidades negativas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Analizaremos la primera interpretación geométrica ideada por Wallis de los números imaginarios ya que este trabajo fue un gran progreso a la interpretación geométrica de las raíces imaginarias.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ÉPOCA Y VIDA PROFESIONAL</td><td>PRODUCCION E INTENCIONALIDAD</td></tr>
<tr><td>ÉPOCA</td><td>Vida profesional</td><td>Intencionalidad y uso</td></tr>
</table>

. **Problemas abordados de los números imaginarios respecto a la interpretación geométrica por científicos de la época**. En 1796 Caspar Wessel escribió su primer y único documento matemático en el cual expresaba la interpretación geométrica de los números complejos y lo presentó en una reunión de la Real Academia Danesa el 10 de marzo de 1797 " Ensayo sobre la dirección analítica de la dirección". Despues y gracias a ese resultado de Wallis fue Wessel fue el primero que identificó un número complejo con un punto en el plano, de modo que la parte real y la parte imaginaria del número complejo, respectivamente, se identifican con las coordenadas	**Carrera académica.** leía y hablaba latín, y podía leer en griego, hebreo y francés. Irónicamente, sólo comenzó a estudiar aritmética como "una diversión placentera para las horas libres" en 1649 fue designado profesor de la cátedra Savilian de geometría en la Universidad de Oxford.	**Intencionalidad y uso específico de en la primera interpretación geométrica de raíces imaginarias.** Intentó construir geométricamente la cantidad $\sqrt{-1}$ en su obra Trataise of Algebra (1685), Capítulo LXVI, conociendo los números negativos, a cada punto de una línea recta le asoció un único número real y viceversa. Wallis representó la cantidad $\sqrt{-81}$ como la longitud del segmento de línea recta cercana a un eje perpendicular, el cual conocemos como el eje imaginario. Este trabajo fue un gran progreso a la interpretación geométrica de las raíces imaginarias.

cartesianas del punto.		
Intereses académicos Se le considera el autor de la idea de la recta de números enteros, en la cual los números se representan geométricamente en una línea con los positivos aumentando hacia la derecha y los negativos hacia la izquierda.	**Relación con sus colegas.** El libro Algebra de Wallis fue de gran influencia para el joven Isaac Newton.	

CONCLUSIONES

"Las matemáticas tienen belleza y romance. El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario; merece la pena pasar el tiempo allí"

Marcos du Sautoy

CONCLUSIONES

El conocer cuál es la génesis de un conocimiento matemático nos hace sensibilizarnos respecto a las disputas originadas en la generación de un nuevo conocimiento, todo ello para reconocer que las matemáticas no surgieron trivialmente; tienen una historia, cada suceso posee un contexto, un uso y un usuario específico y ello determina el significado que se le puede dar a un concepto matemático. Esto puede ayudarnos a que en la didáctica de la matemática los alumnos puedan significar un conocimiento matemático a través de comprender cómo, porqué, para quién, quienes, cuándo, etc.

A través de un análisis histórico- epistemológico de los números complejos pudimos reconocer que la matemática es falible, no hay una verdad absoluta. Los estudiantes al conocer lo que se esconde detrás de una belleza pulida aparentemente tan perfecta como son los números complejos, les permita explorar estos números y poder dotarlos de significados.

El análisis histórico- epistemológico de construcción de los números complejos nos deja otra lección: puede ser difícil encontrar situaciones reales que justifiquen la introducción de determinados conceptos, lo que no significa que haya que renunciar a enseñarlos. Es más, los avances y aplicaciones en los que posteriormente se mostraron son tremendamente útiles como la física, electricidad, electromagnetismo, entre otros, indican todo lo contrario. Hay muchos ejemplos en los que conceptos puramente teóricos han encontrado aplicaciones en campos con los que, a priori, era insospechable que pudiesen tener alguna relación.

Por otra parte, también podemos extraer de aquí conclusiones sobre el modo de construcción de la matemática. Por un lado, la matemática, como parte de la ciencia, se ha dedicado a modelizar aspectos de la realidad para poder analizarlos, comprenderlos, obtener o predecir resultados como geometría, aritmética, álgebra, azar, análisis; pero por otro, hay que reconocer que los grandes saltos cualitativos se han producido al romper con ideas ingenuas pero firmemente apoyadas en la intuición o en la experiencia cercana como números irracionales, negativos, imaginarios, geometría no euclídiana o el infinito.

REFERENCIAS

Vemos, por tanto, que los factores primos ideales revelan la esencia de los números complejos, los hacen, por así decir, transparentes, y descubren su estructura cristalina interna.

E. E. Kummer.

REFERENCIAS

Bagni, T. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4(1),* 45-62.

Bagazgoitia, A. (2007). $e^{i\pi}+1=0$ La belleza en Matemáticas. *Revista sigma. 31(1), 133-151.*

Buendía, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13 (4-1), 11-28.

Buendía, G. (2012) El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. Educación Matemática. 24(2), 5-31.

Buendía, G. y Montiel, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación Socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología de la Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Buhlea, C. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio comparativo España-Rumania. INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía IX. VIII *Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y algebraico (PNA). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 15-21. La Salle. Centro Universitario.

Cañón, C. (1993). *La Matemática creación y descubrimiento*. Madrid: UPCO.

Carrasco, M. (2017). *Propuesta didáctica para la enseñanza de la multiplicación de números complejos a partir del tránsito entre el registro algebraico y geométrico.* Tesis de Maestría no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre la construcción social del conocimiento*. México: Gedisa editorial.

Cantoral, R. y Farfán R. (2004). La sensibilité a la contradiction: Logarithmes de nombres négatifs et origine de la complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2.3), pp. 137-168.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2008). Socioepistemología de la contradicción. Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano.* Pp. 241-284. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C y Ediciones Díaz de Santos: México.

Cantoral, R. y Reyes-Gasperini, D. (2014). Socioepistemología y matemáticas: del aula extendida a la sociedad del conocimiento. "todo lo que siempre quisiste saber y nunca te animaste a preguntar". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 27,* 1573-1583.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., Montiel, G. (2014) Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática [en línea] 2014*, 7.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías de conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(3), 265-286.*

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona: Editorial Reverté.

Díaz, A (2007). *Creencias acerca de la enseñanza de los números complejos.* Tesis de maestría no publicada. Universidad de Zulia, Venezuela.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la Analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico*. Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto politécnico nacional.

Gómez, A. y Pardo, T. (2005). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario. *Acta del* Noveno *Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, pp.*251-260.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un Estudio Socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV- IPN, México

Kleiner, I. (1988). Thinking the unthinkable: The story of complex numbers. *Mathematics Teacher*, 81(7), 711-720.

Maluendas, C. (2019). *Una breve historia imaginaria.* Documento inédito. Universidad Nacional de Colombia. Manizales, Colombia.

Marquéz, G. (2018). *Una problematización del concepto de topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de fréchet*. Centro de Investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Martín, F. (2013). *Cardano y Tartaglia: la aventura de la ecuación cubica*. México: S.L. Nivola Libros y Ediciones editorial

Maumary, C.; Maumary, M. (2015). Las tribulaciones que generan los números complejos en nuestros alumnos y en nosotros, los docentes. *IV Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales.* Ensenada, Argentina. EN: Actas. Ensenada: Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Departamento de Ciencias Exactas y Naturales.

Nain, P. (2008). Esto no es real. La historia de i. México DF: Libraria.

Pecharromán, C. (2013) Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado, *Enseñanza de las Ciencias* 31 (3), pp. 121-134.

Poincaré, H. (1978). *Filosofía de la Ciencia. Antología de textos de Poincaré.* México: UNAM.

Real Academia Española (2019). Madrid, España: http://www.rae.es/

Riviera, F. (2001). *Una Introducción a los Números Complejos*. México: OPENLIBRA editorial.

Rodríguez, F. y Vicario, M., (2015). El uso de la historia de la matemática en la enseñanza. En F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 411-420. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Sandoval, E. (2010). Las representaciones geométricas como herramienta para la construcción del significado de expresiones y operaciones algebraicas, desarrollando con alumnos de octavo grado del instituto "San José del Pedregal". Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional "Francisco Morazán". Honduras.

Schneider, M. (2004). Des nombres qui modélisent des transformations (2). Petit x. Num. 64. p. 7-34

Sierra, M. (1997). "Notas de Historia de las Matemáticas para el currículo de secundaria". En "La Educación Matemática en la enseñanza secundaria". Cuadernos de formación del profesorado, V. 12. Editorial Horsori. 2º edición. Barcelona, España.

Smith, D. (1958). *History of Mathematics*. New York.

Steward, I. (2012). *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*. España: Crítica editoral.

Vidal, R., Quintanilla, M. y Maz, A. (2010). La historia de la Matemática: Un valioso componente para la formación del profesorado de matemáticas. Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM 1, (5), pp. 7-21